Математический анализ. Лекция IX

Показательная функция

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

1 октября 2013 г.

Определение

Пусть функция $f : X \to Y$ такая, что $Y = f(X)$, и пусть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция f задает *взаимно однозначное соответствие* $X \leftrightarrow Y$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y$ именно то единственное значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, получим функцию $f^{-1}: \ Y \to X$. Функция f^{-1} называется *обратной* по отношению к f.

Определение

Пусть функция $f : X \to Y$ такая, что $Y = f(X)$, и пусть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция f задает *взаимно однозначное соответствие* $X \leftrightarrow Y$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y$ именно то единственное значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, получим функцию $f^{-1}: \ Y \to X$. Функция f^{-1} называется *обратной* по отношению к f.

В силу этого определения

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y),$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in X,$$
$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in Y.$$

Определение

Пусть функция $f : X \to Y$ такая, что $Y = f(X)$, и пусть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция f задает *взаимно однозначное соответствие* $X \leftrightarrow Y$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y$ именно то единственное значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, получим функцию $f^{-1} : \ Y \to X$. Функция f^{-1} называется *обратной* по отношению к f.

В силу этого определения

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y),$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in X,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in Y.$$

Упражнение

Пусть функция $f : \ X \to Y$, $Y = f(X)$ строго монотонна на множестве X. Тогда обратная функция $f^{-1} : \ Y \to X$ строго монотонна на множестве Y.

Упражнение

Графики числовых функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.

Упражнение

Графики числовых функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.

Теорема

Пусть функция $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ задана на отрезке $[a; b]$, строго возрастает и непрерывна.
Тогда обратная функция задана на отрезке $[A; B] = [f(a); f(b)]$, строго возрастает и непрерывна на нем.

Упражнение

Графики числовых функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.

Теорема

Пусть функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ задана на отрезке $[a;b]$, строго возрастает и непрерывна.
Тогда обратная функция задана на отрезке $[A;B] = [f(a);f(b)]$, строго возрастает и непрерывна на нем.

Доказательство. Найдем область значений Y функции f. Поскольку $\forall\, x \in [a;b] \;\to\; A \leqslant f(x) \leqslant B$, то $Y \subset [A;B]$. С другой стороны, по теореме Коши

$$\forall\, C \in [A;B] \;\to\; \exists\, c \in [a;b] : \; f(c) = C,$$

так что $[A;B] \subset Y$. Следовательно, $Y = [A;B]$.
Строгое возрастание f^{-1} очевидно.

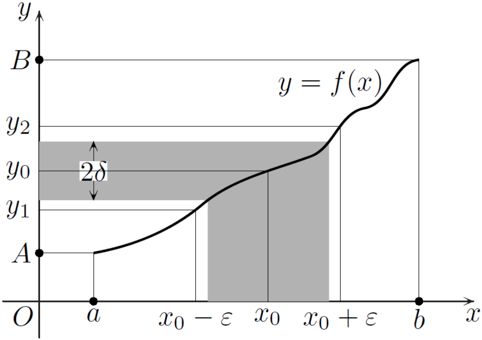
Установим непрерывность f^{-1}. Пусть сначала $y_0 \in (A; B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a; b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon] \subset [a; b].$$

Установим непрерывность f^{-1}. Пусть сначала $y_0 \in (A; B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a; b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon] \subset [a; b].$$

Пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$.



Функция f устанавливает взаимно однозначное соответствие отрезка $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$ и отрезка $[y_1; y_2] \subset [A; B]$. При этом $y_1 < y_0 < y_2$.

Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subset f^{-1}((y_1; y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, функция f^{-1} непрерывна в точке y_0.

Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subset f^{-1}((y_1; y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, функция f^{-1} непрерывна в точке y_0.
Пусть теперь $y_0 = A$ или $y_0 = B$. Тогда односторонняя непрерывность f^{-1} в точке y_0 доказывается аналогично, с использованием односторонних окрестностей.
Теорема доказана.

Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subset f^{-1}((y_1; y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, функция f^{-1} непрерывна в точке y_0.
Пусть теперь $y_0 = A$ или $y_0 = B$. Тогда односторонняя непрерывность f^{-1} в точке y_0 доказывается аналогично, с использованием односторонних окрестностей.
Теорема доказана.

Аналогично формулируется и доказывается теорема для непрерывной и строго убывающей на отрезке функции.

Теорема

Пусть функция $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ задана на интервале $(a;b)$, строго возрастает и непрерывна на нем.
Тогда обратная функция задана, строго возрастает и непрерывна на интервале $(A;B) = \left(\inf\limits_{(a;b)} f; \sup\limits_{(a;b)} f\right)$.

Теорема

Пусть функция $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ задана на интервале $(a;b)$, строго возрастает и непрерывна на нем.
Тогда обратная функция задана, строго возрастает и непрерывна на интервале $(A;B) = \left(\inf\limits_{(a;b)} f; \sup\limits_{(a;b)} f\right)$.

Доказательство. Найдем область значений $Y = f(X)$ функции f.
Покажем, что

$$\forall x \in (a;b) \;\to\; A < f(x) < B.$$

В самом деле. Допустим, например, что $f(x_0) \geqslant B$ при некотором $x_0 \in (a;b)$.
В силу строгого возрастания f получаем, что $\forall x \in (x_0;b) \;\to\; f(x) > B$, что противоречит тому, что $B = \sup\limits_{(a;b)} f$.

Покажем теперь, что

$$\forall\, y_0 \in (A; B) \;\rightarrow\; \exists\, x_0 \in (a; b) : \;\; f(x_0) = y_0.$$

Из определения верхней и нижней граней следует, что

$$\exists\, x_1, x_2 \in (a; b) : \;\; f(x_1) < y_0, \;\; f(x_2) > y_0.$$

Покажем теперь, что

$$\forall\, y_0 \in (A; B) \;\to\; \exists\, x_0 \in (a; b): \; f(x_0) = y_0.$$

Из определения верхней и нижней граней следует, что

$$\exists\, x_1, x_2 \in (a; b): \; f(x_1) < y_0, \; f(x_2) > y_0.$$

Применяя к сужению $f_{[x_1;\, x_2]}$ функции f на отрезок $[x_1; x_2]$ теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции, получаем, что

$$\exists\, x_0 \in [x_1, x_2]: \; f(x_0) = y_0.$$

Следовательно $f(a; b) = (A; B)$.
Непрерывность обратной функции f^{-1} следует из предыдущей теоремы.
Теорема доказана.

Покажем теперь, что

$$\forall\, y_0 \in (A; B) \;\to\; \exists\, x_0 \in (a; b): \; f(x_0) = y_0.$$

Из определения верхней и нижней граней следует, что

$$\exists\, x_1, x_2 \in (a; b): \; f(x_1) < y_0, \; f(x_2) > y_0.$$

Применяя к сужению $f_{[x_1; x_2]}$ функции f на отрезок $[x_1; x_2]$ теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции, получаем, что

$$\exists\, x_0 \in [x_1, x_2]: \; f(x_0) = y_0.$$

Следовательно $f(a; b) = (A; B)$.
Непрерывность обратной функции f^{-1} следует из предыдущей теоремы.
Теорема доказана.

Аналогично формулируется теорема для строго убывающей на интервале функции, а также теоремы об обратной функции для полуинтервалов.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция $f(x) = x^n : \ [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, называемая *степенной функцией* с показателем степени n, строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$ как произведение непрерывных функций. По теореме об обратной функции обратная функция f^{-1}, обозначаемая символами $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция $f(x) = x^n : \ [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, называемая *степенной функцией* с показателем степени n, строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$ как произведение непрерывных функций. По теореме об обратной функции обратная функция f^{-1}, обозначаемая символами $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$.

Для рационального показателя степени $\dfrac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ полагают при $a > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Тем самым a^r определено $\forall\, a \in (0, +\infty)$, $\forall\, r \in \mathbb{Q}$.

Упражнение

Докажите следующие свойства показательной функции a^r рационального аргумента r:

1. $r_1 < r_2 \quad \Rightarrow \quad a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;
2. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;
3. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;
4. $a^0 = 1$;
5. $(ab)^r = a^r b^r$.

Упражнение

Докажите следующие свойства показательной функции a^r рационального аргумента r:

1. $r_1 < r_2 \quad \Rightarrow \quad a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;
2. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;
3. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;
4. $a^0 = 1$;
5. $(ab)^r = a^r b^r$.

Лемма Бернулли

Пусть $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, $|r| \leqslant 1$. Тогда

$$|a^r - 1| \leqslant 2|r|(a - 1).$$

Упражнение

Докажите следующие свойства показательной функции a^r рационального аргумента r:

1. $r_1 < r_2 \quad \Rightarrow \quad a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;
2. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;
3. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;
4. $a^0 = 1$;
5. $(ab)^r = a^r b^r$.

Лемма Бернулли

Пусть $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, $|r| \leqslant 1$. Тогда

$$|a^r - 1| \leqslant 2|r|(a - 1).$$

Доказательство. Пусть сначала $r = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\lambda = a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. Тогда $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \lambda$, $a \geqslant 1 + n\lambda$, откуда $\lambda \leqslant \dfrac{a-1}{n}$, то есть

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a - 1).$$

Пусть теперь $0 < r \leqslant 1$. Тогда $\dfrac{1}{n+1} < r \leqslant \dfrac{1}{n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. В силу монотонности функции a^r получаем

$$a^r - 1 \leqslant a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a-1) \leqslant \frac{2}{n+1}(a-1) < 2r(a-1),$$

и неравенство в этом случае установлено.

Пусть теперь $0 < r \leqslant 1$. Тогда $\dfrac{1}{n+1} < r \leqslant \dfrac{1}{n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. В силу монотонности функции a^r получаем

$$a^r - 1 \leqslant a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a-1) \leqslant \frac{2}{n+1}(a-1) < 2r(a-1),$$

и неравенство в этом случае установлено.
Пусть теперь $-1 \leqslant r < 0$. Тогда

$$|a^r - 1| = a^r|a^{-r} - 1| \leqslant a^r 2(-r)(a-1)$$

Учитывая, что $a^r < 1$, получаем отсюда требуемое неравенство.
Лемма доказана.

Пусть теперь $0 < r \leqslant 1$. Тогда $\dfrac{1}{n+1} < r \leqslant \dfrac{1}{n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. В силу монотонности функции a^r получаем

$$a^r - 1 \leqslant a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a-1) \leqslant \frac{2}{n+1}(a-1) < 2r(a-1),$$

и неравенство в этом случае установлено.
Пусть теперь $-1 \leqslant r < 0$. Тогда

$$|a^r - 1| = a^r|a^{-r} - 1| \leqslant a^r 2(-r)(a-1)$$

Учитывая, что $a^r < 1$, получаем отсюда требуемое неравенство.
Лемма доказана.

Определение

Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Тогда

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Это определение корректно в следующем смысле:

1. $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
2. $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$ $(r_n \to x)$;
3. по этому определению в случае $x = r$ значение a^r совпадает с прежним.

Это определение корректно в следующем смысле:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$ $(r_n \to x)$;
3. по этому определению в случае $x = r$ значение a^r совпадает с прежним.

Установим 1. Пусть $a > 1$, $r_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\forall\, n, m \geqslant n_1 \ \to \ |r_n - r_m| \leqslant 1$$

в силу сходимости последовательности $\{r_n\}$. С помощью леммы Бернулли имеем для $n, m \geqslant n_1$:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| \leqslant a^{r_m} 2|r_n - r_m|(a - 1).$$

Это определение корректно в следующем смысле:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$ $(r_n \to x)$;
3. по этому определению в случае $x = r$ значение a^r совпадает с прежним.

Установим 1. Пусть $a > 1$, $r_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\forall\, n, m \geqslant n_1 \ \to \ |r_n - r_m| \leqslant 1$$

в силу сходимости последовательности $\{r_n\}$. С помощью леммы Бернулли имеем для $n, m \geqslant n_1$:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| \leqslant a^{r_m} 2|r_n - r_m|(a-1).$$

Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ ограничена (как всякая сходящаяся), поэтому при некотором $M > 0$

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \ \to \ a^{r_m} \leqslant M.$$

В силу сходимости последовательности $\{r_n\}$ для нее выполнено условие Коши:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon \ \rightarrow \ |r_n - r_m| < \varepsilon.$$

Отсюда, при $0 < \varepsilon \leqslant 1$, имеем

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leqslant M2(a-1)\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности $\{a^{r_n}\}$ выполнено условие Коши. В силу критерия Коши она сходится, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен.

В силу сходимости последовательности $\{r_n\}$ для нее выполнено условие Коши:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\to\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \;\forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon \;\to\; |r_n - r_m| < \varepsilon.$$

Отсюда, при $0 < \varepsilon \leqslant 1$, имеем

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leqslant M2(a-1)\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности $\{a^{r_n}\}$ выполнено условие Коши. В силу критерия Коши она сходится, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{r_n}},$$

и существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ следует из уже установленного существования положительного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}$.

Случай $a = 1$ тривиален.

Установим 2. Пусть $a > 1$, $r_n \to x$, $r'_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $r_n - r'_n \to 0$ при $n \to \infty$, и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n}|a^{r_n - r'_n} - 1| \leqslant M2|r_n - r'_n|(a-1) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} - \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.

Установим 2. Пусть $a > 1$, $r_n \to x$, $r'_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $r_n - r'_n \to 0$ при $n \to \infty$, и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n}|a^{r_n - r'_n} - 1| \leqslant M2|r_n - r'_n|(a-1) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} - \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.
Случай $0 < a < 1$ сводится к рассмотренному с помощью равенства

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}.$$

Установим 2. Пусть $a > 1$, $r_n \to x$, $r'_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $r_n - r'_n \to 0$ при $n \to \infty$, и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n}|a^{r_n - r'_n} - 1| \leqslant M2|r_n - r'_n|(a-1) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} - \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.
Случай $0 < a < 1$ сводится к рассмотренному с помощью равенства

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{r_n}}.$$

Установим 3. Для этого достаточно рассмотреть последовательность $\{r_n\}$, где $r_n = r \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Определение

При $a > 0$ функция $x \to a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ называется *показательной* с основанием a.
Функция $x \to e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется *экспоненциальной*. Иногда вместо e^x пишут $\exp(x)$.

Определение

При $a > 0$ функция $x \to a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ называется *показательной* с основанием a.
Функция $x \to e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется *экспоненциальной*. Иногда вместо e^x пишут $\exp(x)$.

Теорема

Показательная функция имеет следующие свойства:

1. $a^x > 0 \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty)$;
2. при $a > 1$ $\;a^x$ строго возрастает, при $0 < a < 1$ строго убывает;
3. $a^x a^y = a^{x+y}$;
4. $(bc)^x = b^x c^x$;
5. $(a^x)^y = a^{xy}$;
6. a^x непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

Определение

При $a > 0$ функция $x \to a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ называется *показательной* с основанием a.
Функция $x \to e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется *экспоненциальной*. Иногда вместо e^x пишут $\exp(x)$.

Теорема

Показательная функция имеет следующие свойства:

1. $a^x > 0 \;\; \forall x \in (-\infty, +\infty)$;
2. при $a > 1$ a^x строго возрастает, при $0 < a < 1$ строго убывает;
3. $a^x a^y = a^{x+y}$;
4. $(bc)^x = b^x c^x$;
5. $(a^x)^y = a^{xy}$;
6. a^x непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

Упражнение

Докажите теорему.