Математический анализ. Лекция VIII

Непрерывные функции

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

25 сентября 2013 г.

Определение

Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение

Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Упражнение

Докажите, что каждое из следующих утверждений эквивалентно определению непрерывности функции в точке:

1. $\forall \varepsilon > 0 \;\to\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x : |x - x_0| < \delta \;\to\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$
2. $\forall \varepsilon > 0 \;\to\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0));$
3. $\forall\, U(f(x_0)) \;\to\; \exists\, U(x_0) : \; f(U(x_0)) \subset U(f(x_0));$
4. $\forall \{x_n\} : \; x_n \in U(x_0), \; \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \;\to\; \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$

Лемма о сохранении знака функции

Пусть функция f непрерывна в x_0, $f(x_0) > 0$. Тогда

$$\exists\, U(x_0): \ \forall x \in U(x_0) \ \rightarrow \ f(x) > 0.$$

Лемма о сохранении знака функции

Пусть функция f непрерывна в x_0, $f(x_0) > 0$. Тогда

$$\exists\, U(x_0) : \ \forall\, x \in U(x_0) \ \to \ f(x) > 0.$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{d}{2} > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{d}{2}$ при $|x - x_0| < \delta$, откуда следует, что

$$\forall\, x \in U(x_0) \ \to \ f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0.$$

Лемма о сохранении знака функции

Пусть функция f непрерывна в x_0, $f(x_0) > 0$. Тогда

$$\exists\, U(x_0): \ \forall x \in U(x_0) \ \rightarrow \ f(x) > 0.$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{d}{2} > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{d}{2}$ при $|x - x_0| < \delta$, откуда следует, что

$$\forall x \in U(x_0) \ \rightarrow \ f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0.$$

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Пусть функции f, g непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f+g$, $f-g$, fg, а при $g(x_0) \neq 0$ и $\dfrac{f}{g}$ непрерывны в точке x_0.

Лемма о сохранении знака функции

Пусть функция f непрерывна в x_0, $f(x_0) > 0$. Тогда

$$\exists\, U(x_0): \ \forall\, x \in U(x_0) \ \to \ f(x) > 0.$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{d}{2} > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{d}{2}$ при $|x - x_0| < \delta$, откуда следует, что

$$\forall\, x \in U(x_0) \ \to \ f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0.$$

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Пусть функции f, g непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f+g$, $f-g$, fg, а при $g(x_0) \neq 0$ и $\dfrac{f}{g}$ непрерывны в точке x_0.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0).$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0).$$

Докажем, что функция $\dfrac{f}{g}$ непрерывна в x_0. По лемме о сохранении знака,

$$\exists\, U(x_0): \ \forall\, x \in U(x_0) \ \to \ g(x) \neq 0,$$

так что частное $\dfrac{f}{g}$ определено на $U(x_0)$. Поэтому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

что и требовалось показать.

Докажем, что функция $\dfrac{f}{g}$ непрерывна в x_0. По лемме о сохранении знака,

$$\exists\, U(x_0) :\ \forall x \in U(x_0) \ \to\ g(x) \neq 0,$$

так что частное $\dfrac{f}{g}$ определено на $U(x_0)$. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

что и требовалось показать.

Следствие

Многочлены и рациональные функции непрерывны в каждой точке области определения.

Теорема

Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ непрерывна в точке t_0, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда функция $f \circ \varphi$ непрерывна в точке t_0.

Теорема

Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ непрерывна в точке t_0, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда функция $f \circ \varphi$ непрерывна в точке t_0.

Доказательство. Пусть $y_0 = f(x_0)$, $U(y_0)$ – произвольная окрестность y_0. Поскольку функция f непрерывна в x_0,

$$\exists\, U(x_0) : \;\; f(U(x_0)) \subset U(y_0)$$

Так как φ непрерывна в точке t_0, то

$$\exists\, U(t_0) : \;\; \varphi(U(t_0)) \subset U(x_0).$$

Теорема

Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ непрерывна в точке t_0, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда функция $f \circ \varphi$ непрерывна в точке t_0.

Доказательство. Пусть $y_0 = f(x_0)$, $U(y_0)$ – произвольная окрестность y_0. Поскольку функция f непрерывна в x_0,

$$\exists\, U(x_0): \ f(U(x_0)) \subset U(y_0)$$

Так как φ непрерывна в точке t_0, то

$$\exists\, U(t_0): \ \varphi(U(t_0)) \subset U(x_0).$$

Следовательно, на $U(t_0)$ определена сложная функция $f \circ \varphi$, причем

$$(f \circ \varphi)(U(t_0)) = f(\varphi(U(t_0))) \subset U(y_0),$$

где $y_0 = f(x_0) = f(\varphi(t_0)) = (f \circ \varphi)(t_0)$.

Теорема

Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ непрерывна в точке t_0, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда функция $f \circ \varphi$ непрерывна в точке t_0.

Доказательство. Пусть $y_0 = f(x_0)$, $U(y_0)$ – произвольная окрестность y_0. Поскольку функция f непрерывна в x_0,

$$\exists\, U(x_0): \ f(U(x_0)) \subset U(y_0)$$

Так как φ непрерывна в точке t_0, то

$$\exists\, U(t_0): \ \varphi(U(t_0)) \subset U(x_0).$$

Следовательно, на $U(t_0)$ определена сложная функция $f \circ \varphi$, причем

$$(f \circ \varphi)(U(t_0)) = f(\varphi(U(t_0))) \subset U(y_0),$$

где $y_0 = f(x_0) = f(\varphi(t_0)) = (f \circ \varphi)(t_0)$.
В силу произвольности $U(y_0)$ это означает непрерывность $f \circ \varphi$ в точке t_0.

Теорема

Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ определена на $\mathring{U}(t_0)$ и $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$. Тогда

$$\exists \lim_{t\to t_0} (f \circ \varphi)(t) = f(\lim_{t\to t_0} \varphi(t)) = f(x_0).$$

Теорема

Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ определена на $\mathring{U}(t_0)$ и $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$. Тогда

$$\exists \lim_{t \to t_0} (f \circ \varphi)(t) = f(\lim_{t \to t_0} \varphi(t)) = f(x_0).$$

Доказательство. Доопределим (или переопределим ее, если она изначально была определена в t_0) функцию φ в точке t_0, положив $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда φ становится непрерывной в точке t_0. Осталось воспользоваться предыдущей теоремой.

Теорема

Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ определена на $\mathring{U}(t_0)$ и $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$. Тогда

$$\exists \lim_{t\to t_0} (f\circ\varphi)(t) = f(\lim_{t\to t_0} \varphi(t)) = f(x_0).$$

Доказательство. Доопределим (или переопределим ее, если она изначально была определена в t_0) функцию φ в точке t_0, положив $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда φ становится непрерывной в точке t_0. Осталось воспользоваться предыдущей теоремой.

Теорема

Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Пусть φ определена на $\mathring{U}(t_0)$, $x_0 \notin \varphi(\mathring{U}(t_0))$ и $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$. Тогда $\exists \lim\limits_{t\to t_0} (f\circ\varphi)(t) = y_0$.

Теорема

Пусть функция f непрерывна в точке x_0, а функция φ определена на $\mathring{U}(t_0)$ и $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$. Тогда

$$\exists \lim_{t\to t_0} (f\circ\varphi)(t) = f(\lim_{t\to t_0} \varphi(t)) = f(x_0).$$

Доказательство. Доопределим (или переопределим ее, если она изначально была определена в t_0) функцию φ в точке t_0, положив $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда φ становится непрерывной в точке t_0. Осталось воспользоваться предыдущей теоремой.

Теорема

Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Пусть φ определена на $\mathring{U}(t_0)$, $x_0 \notin \varphi(\mathring{U}(t_0))$ и $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$. Тогда $\exists \lim\limits_{t\to t_0} (f\circ\varphi)(t) = y_0$.

Доказательство. Доопределим (переопределим) функцию f в точке x_0, положив $f(x_0) = y_0$. Остается воспользоваться предыдущей теоремой.

Упражнение

Докажите три предыдущие теоремы, используя определение предела “по Гейне”.

Упражнение

Докажите три предыдущие теоремы, используя определение предела "по Гейне".

Упражнение

Приведите пример двух функций, таких, что

$$\exists \lim_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0, \qquad \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0,$$

но $\lim_{t \to t_0} f(\varphi(t)) \neq y_0$.

Определение

Функция f, определенная на $U(x_0+0)$, называется *непрерывной справа в точке* x_0, если
$$\exists\, f(x_0+0)=f(x_0).$$

Определение

Функция f, определенная на $U(x_0+0)$, называется *непрерывной справа в точке* x_0, если
$$\exists\, f(x_0+0) = f(x_0).$$

Определение

Функция f, определенная на $U(x_0-0)$, называется *непрерывной слева в точке* x_0, если
$$\exists\, f(x_0-0) = f(x_0).$$

Определение

Функция f, определенная на $U(x_0+0)$, называется *непрерывной справа в точке* x_0, если
$$\exists\, f(x_0+0)=f(x_0).$$

Определение

Функция f, определенная на $U(x_0-0)$, называется *непрерывной слева в точке* x_0, если
$$\exists\, f(x_0-0)=f(x_0).$$

Упражнение

Докажите, что функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в x_0 справа и слева.

Определение

Функция f, определенная на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *разрывной в точке* x_0, если она не определена в x_0 или определена в x_0, но не является непрерывной в x_0.

Определение

Функция f, определенная на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *разрывной в точке* x_0, если она не определена в x_0 или определена в x_0, но не является непрерывной в x_0.

Определение

Точка x_0 разрыва функции f называется *точкой разрыва I-го рода*, если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.

Определение

Функция f, определенная на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *разрывной в точке* x_0, если она не определена в x_0 или определена в x_0, но не является непрерывной в x_0.

Определение

Точка x_0 разрыва функции f называется *точкой разрыва I-го рода*, если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$. При этом разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции f в точке* x_0.

Определение

Функция f, определенная на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *разрывной в точке* x_0, если она не определена в x_0 или определена в x_0, но не является непрерывной в x_0.

Определение

Точка x_0 разрыва функции f называется *точкой разрыва I-го рода*, если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$. При этом разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции f в точке* x_0. Если при этом $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то есть скачок равен нулю, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

Определение

Функция f, определенная на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *разрывной в точке* x_0, если она не определена в x_0 или определена в x_0, но не является непрерывной в x_0.

Определение

Точка x_0 разрыва функции f называется *точкой разрыва I-го рода*, если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$. При этом разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции f в точке* x_0. Если при этом $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то есть скачок равен нулю, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.
Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва I-го рода, называется *точкой разрыва II-го рода*.

Определение

Функция f, определенная на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *разрывной в точке* x_0, если она не определена в x_0 или определена в x_0, но не является непрерывной в x_0.

Определение

Точка x_0 разрыва функции f называется *точкой разрыва I-го рода*, если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$. При этом разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции* f *в точке* x_0. Если при этом $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то есть скачок равен нулю, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.
Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва I-го рода, называется *точкой разрыва II-го рода*.

Упражнение

Докажите, что монотонная на отрезке функция имеет на этом отрезке не более чем счетное множество точек разрыва.

Определение

Функция, определенная на отрезке $[a; b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется *непрерывной на* этом *отрезке*. При этом под непрерывностью в точках a, b понимается непрерывность справа и слева соответственно.

Определение

Функция, определенная на отрезке $[a; b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется *непрерывной на* этом *отрезке*. При этом под непрерывностью в точках a, b понимается непрерывность справа и слева соответственно.

Аналогично определяется непрерывность на интервале, на полуинтервале.

Определение

Функция, определенная на отрезке $[a; b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется *непрерывной на* этом *отрезке*. При этом под непрерывностью в точках a, b понимается непрерывность справа и слева соответственно.

Аналогично определяется непрерывность на интервале, на полуинтервале.

Определение

Говорят, что функция f, определенная на E, *достигает на E своей верхней грани*, если

$$\exists\, x_0 \in E : \; f(x_0) = \sup_E f.$$

Теорема Вейерштрасса

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает на нем своих верхней и нижней граней.

Теорема Вейерштрасса

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает на нем своих верхней и нижней граней.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, и пусть $B = \sup\limits_{[a;b]} f \leqslant +\infty$. По определению верхней грани

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ \exists\, x_n \in [a;b]: \ f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(B).$$

Следовательно, $f(x_n) \to B$ при $n \to \infty$.

Теорема Вейерштрасса

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает на нем своих верхней и нижней граней.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, и пусть $B = \sup\limits_{[a;b]} f \leqslant +\infty$. По определению верхней грани

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ \exists\, x_n \in [a; b]: \ f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(B).$$

Следовательно, $f(x_n) \to B$ при $n \to \infty$.
Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leqslant x_n \leqslant b$. По теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \to x_0$.

Теорема Вейерштрасса

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает на нем своих верхней и нижней граней.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, и пусть $B = \sup\limits_{[a;b]} f \leqslant +\infty$. По определению верхней грани

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; \exists\, x_n \in [a;b]:\; f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(B).$$

Следовательно, $f(x_n) \to B$ при $n \to \infty$.
Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leqslant x_n \leqslant b$. По теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \to x_0$.
Переходя к пределу в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, получаем, что $x_0 \in [a;b]$. В силу непрерывности функции f в точке x_0, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ – подпоследовательность сходящейся к B последовательности. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = B$.

Теорема Вейерштрасса

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает на нем своих верхней и нижней граней.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, и пусть $B = \sup\limits_{[a;b]} f \leqslant +\infty$. По определению верхней грани

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ \exists\, x_n \in [a;b]: \ f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(B).$$

Следовательно, $f(x_n) \to B$ при $n \to \infty$.
Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leqslant x_n \leqslant b$. По теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \to x_0$.
Переходя к пределу в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, получаем, что $x_0 \in [a;b]$. В силу непрерывности функции f в точке x_0, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ – подпоследовательность сходящейся к B последовательности. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = B$.
Из последних двух соотношений получаем, что

$$\sup\limits_{[a;b]} f = B = f(x_0).$$

Отсюда следует, во-первых, что $\sup\limits_{[a;b]} f < +\infty$, то есть что функция f ограничена сверху, и, во-вторых, что функция f достигает своей верхней грани в точке x_0.

Отсюда следует, во-первых, что $\sup\limits_{[a;b]} f < +\infty$, то есть что функция f ограничена сверху, и, во-вторых, что функция f достигает своей верхней грани в точке x_0.
Аналогично можно доказать, что функция f ограничена снизу и достигает своей нижней грани.
Теорема доказана.

Отсюда следует, во-первых, что $\sup\limits_{[a;b]} f < +\infty$, то есть что функция f ограничена сверху, и, во-вторых, что функция f достигает своей верхней грани в точке x_0.
Аналогично можно доказать, что функция f ограничена снизу и достигает своей нижней грани.
Теорема доказана.

Упражнение

Останется ли верным утверждение теоремы Вейерштрасса, если в ее условиях отрезок $[a; b]$ заменить на интервал $(a; b)$?

Отсюда следует, во-первых, что $\sup\limits_{[a;b]} f < +\infty$, то есть что функция f ограничена сверху, и, во-вторых, что функция f достигает своей верхней грани в точке x_0.
Аналогично можно доказать, что функция f ограничена снизу и достигает своей нижней грани.
Теорема доказана.

Упражнение

Останется ли верным утверждение теоремы Вейерштрасса, если в ее условиях отрезок $[a;b]$ заменить на интервал $(a;b)$?

Следствие

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, и пусть $\forall\, x \in [a;b] \;\to\; f(x) > 0$. Тогда $\exists\, d > 0 :\; \forall\, x \in [a;b] \;\to\; f(x) \geqslant d$.

Определение

Пусть функция f задана на E и для некоторой точки $x_0 \in E$ справедливо неравенство

$$\forall x \in E \;\to\; f(x) \leqslant f(x_0).$$

Тогда точка x_0 называется *точкой максимума* функции f на E. Значение $f(x_0)$ называется *максимумом* функции f на E и обозначается символом $\max\limits_E f$.

Определение

Пусть функция f задана на E и для некоторой точки $x_0 \in E$ справедливо неравенство
$$\forall x \in E \ \rightarrow \ f(x) \leqslant f(x_0).$$
Тогда точка x_0 называется *точкой максимума* функции f на E. Значение $f(x_0)$ называется *максимумом* функции f на E и обозначается символом $\max\limits_E f$.

Аналогично определяются *точка минимума* функции f на E и *минимум* f на E, обозначаемый символом $\min\limits_E f$.

Определение

Пусть функция f задана на E и для некоторой точки $x_0 \in E$ справедливо неравенство

$$\forall x \in E \ \rightarrow \ f(x) \leqslant f(x_0).$$

Тогда точка x_0 называется *точкой максимума* функции f на E. Значение $f(x_0)$ называется *максимумом* функции f на E и обозначается символом $\max\limits_E f$.

Аналогично определяются *точка минимума* функции f на E и *минимум* f на E, обозначаемый символом $\min\limits_E f$.

Теорема Вейерштрасса утверждает, в частности, что непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке максимум и минимум.

Теорема Коши (о промежуточном значении функции)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$. Пусть число C находится между числами A и B. Тогда

$$\exists\, c \in [a;b]: \ f(c)=C.$$

Теорема Коши (о промежуточном значении функции)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть число C находится между числами A и B. Тогда

$$\exists\, c \in [a; b]: \ f(c) = C.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $A = f(a) \leqslant C \leqslant f(b) = B$. Поделим отрезок $[a; b]$ пополам и через $[a_1, b_1]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_1) \leqslant C \leqslant f(b_1)$. Поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и через $[a_2, b_2]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_2) \leqslant C \leqslant f(b_2)$. Продолжая процесс, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, для которых

$$f(a_n) \leqslant C \leqslant f(b_n).$$

Теорема Коши (о промежуточном значении функции)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть число C находится между числами A и B. Тогда

$$\exists\, c \in [a; b] : \ f(c) = C.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $A = f(a) \leqslant C \leqslant f(b) = B$. Поделим отрезок $[a; b]$ пополам и через $[a_1, b_1]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_1) \leqslant C \leqslant f(b_1)$. Поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и через $[a_2, b_2]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_2) \leqslant C \leqslant f(b_2)$. Продолжая процесс, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, для которых

$$f(a_n) \leqslant C \leqslant f(b_n).$$

Пусть $c \in [a_n, b_n]$ – их общая точка. Тогда $a_n \to c$, $b_n \to c$ при $n \to \infty$ и (в силу непрерывности функции f в точке c)

$$f(a_n) \to f(c), \quad f(b_n) \to f(c) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Переходя к пределу в неравенстве $f(a_n) \leqslant C \leqslant f(b_n)$, получаем

$$f(c) \leqslant C \leqslant f(c) \quad \Rightarrow \quad f(c) = C,$$

что и требовалось доказать.

Следствие

Пусть функция f непрерывна на $[a; b]$ и $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Тогда

$$\exists\, c \in (a; b): \ \ f(c) = 0.$$

Следствие

Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$ и $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Тогда

$$\exists\, c \in (a;b): \ f(c) = 0.$$

Следствие

Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$, $m = \min\limits_{[a;b]} f$, $M = \max\limits_{[a;b]} f$. Тогда

$f([a;b]) = [m;M]$.