Математический анализ. Лекция VI

Предел функции

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

18 сентября 2013 г.

Определение

Пусть X и Y – два произвольных множества. Пусть каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что *на множестве* X *задана функция со значениями в* Y. Обозначив эту функцию буквой f, можно записать $f: \ X \to Y$. Через $f(x)$ обозначают *значение функции* f *на элементе* x, то есть тот элемент $y \in Y$, который поставлен в соответствие элементу $x \in X$, $y = f(x)$.

Определение

Пусть X и Y – два произвольных множества. Пусть каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что *на множестве X задана функция со значениями в Y*. Обозначив эту функцию буквой f, можно записать $f: \ X \to Y$. Через $f(x)$ обозначают *значение функции f на элементе x*, то есть тот элемент $y \in Y$, который поставлен в соответствие элементу $x \in X$, $y = f(x)$.
Элемент $x \in X$ называется *аргументом функции*, а элемент $y = f(x) \in Y$ называется *значением функции*.
При этом X называют *областью определения функции f*, а

$$f(X) = \{y : \ \exists x \in X : \ y = f(x)\} \subset Y$$

называют *областью значений функции f*.

Определение

При $E \subset X$ множество $f(E) = \{y : \exists x \in E : y = f(x)\}$ называется *образом* E.

Определение

При $E \subset X$ множество $f(E) = \{y : \ \exists x \in E : \ y = f(x)\}$ называется *образом* E.
При $D \subset Y$ множество $f^{-1}(D) = \{x \in X : \ f(x) \in D\}$ называется *полным прообразом* D.

Определение

При $E \subset X$ множество $f(E) = \{y : \exists x \in E : y = f(x)\}$ называется *образом* E.
При $D \subset Y$ множество $f^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \in D\}$ называется *полным прообразом* D.
При $E \subset X$ функция $f_E : E \to Y$, $f_E(x) = f(x)$ при $x \in E$, называется *сужением функции* f на E.

Определение

При $E \subset X$ множество $f(E) = \{y : \ \exists x \in E : \ y = f(x)\}$ называется *образом* E.
При $D \subset Y$ множество $f^{-1}(D) = \{x \in X : \ f(x) \in D\}$ называется *полным прообразом* D.
При $E \subset X$ функция $f_E : \ E \to Y$, $f_E(x) = f(x)$ при $x \in E$, называется *сужением функции* f на E.

Определение

Графиком функции $f : X \to Y$ называется множество пар $\{(x, f(x)) : \ x \in X\}$.

Определение

При $E \subset X$ множество $f(E) = \{y : \ \exists x \in E : \ y = f(x)\}$ называется *образом* E.
При $D \subset Y$ множество $f^{-1}(D) = \{x \in X : \ f(x) \in D\}$ называется *полным прообразом* D.
При $E \subset X$ функция $f_E : \ E \to Y$, $f_E(x) = f(x)$ при $x \in E$, называется *сужением функции* f на E.

Определение

Графиком функции $f : X \to Y$ называется множество пар $\{(x, f(x)) : \ x \in X\}$.

Определение

Пусть функция f определена на X, а функция φ – на Z, причем $\varphi(Z) \subset X$. Тогда *сложная функция* $f \circ \varphi$ определяется на Z формулой

$$\forall z \in Z \ \to \ (f \circ \varphi)(z) = f(\varphi(z)).$$

Определение

Функция называется *числовой*, если ее значениями являются действительные числа.

Определение

Функция называется *числовой*, если ее значениями являются действительные числа.
Для числовых функций запись $f \leqslant g$ *на* E будет означать, что

$$\forall x \in E \ \rightarrow \ f(x) \leqslant g(x).$$

Определение

Функция называется *числовой*, если ее значениями являются действительные числа.
Для числовых функций запись $f \leqslant g$ *на* E будет означать, что

$$\forall x \in E \;\to\; f(x) \leqslant g(x).$$

Аналогичный смысл будут иметь записи $f < g$, $f = g$, $f \geqslant g$, $f > g$, $f > 0$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0$, $f = C$ *на* E.

Определение

Функция называется *числовой*, если ее значениями являются действительные числа.
Для числовых функций запись $f \leqslant g$ *на* E будет означать, что

$$\forall x \in E \ \rightarrow \ f(x) \leqslant g(x).$$

Аналогичный смысл будут иметь записи $f < g$, $f = g$, $f \geqslant g$, $f > g$, $f > 0$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0$, $f = C$ *на* E.

Определение

Числовая функция $f: \ X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если область ее значений $f(X)$ ограничена.

Определение

Функция называется *числовой*, если ее значениями являются действительные числа.
Для числовых функций запись $f \leqslant g$ *на* E будет означать, что

$$\forall x \in E \ \rightarrow \ f(x) \leqslant g(x).$$

Аналогичный смысл будут иметь записи $f < g$, $f = g$, $f \geqslant g$, $f > g$, $f > 0$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0$, $f = C$ *на* E.

Определение

Числовая функция $f : \ X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если область ее значений $f(X)$ ограничена.

Определение

Пусть функция f определена на множестве E. Тогда $\sup\limits_E f = \sup f(E)$ называется *верхней гранью* числовой функции на множестве E.

Определение

Функция называется *числовой*, если ее значениями являются действительные числа.
Для числовых функций запись $f \leqslant g$ *на* E будет означать, что

$$\forall x \in E \ \rightarrow \ f(x) \leqslant g(x).$$

Аналогичный смысл будут иметь записи $f < g$, $f = g$, $f \geqslant g$, $f > g$, $f > 0$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0$, $f = C$ *на* E.

Определение

Числовая функция $f: \ X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если область ее значений $f(X)$ ограничена.

Определение

Пусть функция f определена на множестве E. Тогда $\sup\limits_E f = \sup f(E)$ называется *верхней гранью* числовой функции на множестве E.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будут изучаться лишь числовые функции, заданные на числовом множестве $X \subset \mathbb{R}$.

Определение

Множества

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}, \quad \mathring{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$$

называются *проколотыми окрестностями точки* a.

Точкой называют любой элемент $\hat{\mathbb{R}}$.

Определение

Множества

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}, \quad \mathring{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$$

называются *проколотыми окрестностями точки a*.

Точкой называют любой элемент $\hat{\mathbb{R}}$.

Определение

Определение "по Коши": Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \hat{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом f при $x \to a$*, если

$$\forall\, U(A) \;\to\; \exists\, U(a): \; f(\mathring{U}(a)) \subset U(A).$$

Определение

Множества

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}, \quad \mathring{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$$

называются *проколотыми окрестностями точки* a.

Точкой называют любой элемент $\hat{\mathbb{R}}$.

Определение

Определение "по Коши": Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \hat{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом* f *при* $x \to a$, если

$$\forall\, U(A) \;\to\; \exists\, U(a) : \; f(\mathring{U}(a)) \subset U(A).$$

Определение "по Гейне": Пусть функция f определена на $\mathring{U}(a)$, $a \in \hat{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом функции* f *при* $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; x_n \in \mathring{U}(a)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ последовательность $f(x_n)$ сходится к A.

Для обозначения предела пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Для обозначения предела пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Теорема

Определения предела “по Коши” и “по Гейне” эквивалентны.

Для обозначения предела пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Теорема

Определения предела “по Коши” и “по Гейне” эквивалентны.

Доказательство. Покажем сначала, что если A является пределом функции f при $x \to a$ “по Коши”, то A является пределом функции f при $x \to a$ “по Гейне”.

Пусть $f : \ \mathring{U}(a) \to \mathbb{R}$, и пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ “по Коши”. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \in \mathring{U}(a)$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Для обозначения предела пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Теорема

Определения предела "по Коши" и "по Гейне" эквивалентны.

Доказательство. Покажем сначала, что если A является пределом функции f при $x \to a$ "по Коши", то A является пределом функции f при $x \to a$ "по Гейне".

Пусть $f: \ \mathring{U}(a) \to \mathbb{R}$, и пусть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ "по Коши". Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \in \mathring{U}(a)$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \to \ f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

В силу сходимости $x_n \to a$ при $n \to \infty$ и $x_n \in \mathring{U}(a)$ для этого δ

$$\exists\, n_\delta \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geqslant n_\delta \ \to \ x_n \in \mathring{U}_\delta.$$

Для обозначения предела пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Теорема

Определения предела “по Коши” и “по Гейне” эквивалентны.

Доказательство. Покажем сначала, что если A является пределом функции f при $x \to a$ “по Коши”, то A является пределом функции f при $x \to a$ “по Гейне”.

Пусть $f: \ \mathring{U}(a) \to \mathbb{R}$, и пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ “по Коши”. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \in \mathring{U}(a)$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \to \ f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

В силу сходимости $x_n \to a$ при $n \to \infty$ и $x_n \in \mathring{U}(a)$ для этого δ

$$\exists\, n_\delta \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geqslant n_\delta \ \to \ x_n \in \mathring{U}_\delta.$$

Но тогда

$$\forall\, n \geqslant n_\delta \ \to \ f(x_n) \in U_\varepsilon(A),$$

то есть $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$, что и требовалось показать.

Докажем теперь, что если A является пределом функции f при $x \to a$ "по Гейне", то A является пределом функции f при $x \to a$ "по Коши".

Докажем теперь, что если A является пределом функции f при $x \to a$ "по Гейне", то A является пределом функции f при $x \to a$ "по Коши".
Допустим противное, то есть что

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \ \forall\, \delta > 0 \ \to \ \exists\, x \in \mathring{U}_\delta(a) : \ f(x) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

Докажем теперь, что если A является пределом функции f при $x \to a$ "по Гейне", то A является пределом функции f при $x \to a$ "по Коши".
Допустим противное, то есть что

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \ \forall\, \delta > 0 \ \to \ \exists\, x \in \mathring{U}_\delta(a) : \ f(x) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

В качестве δ будем брать $\delta = \frac{1}{n}$ и соответствующее значение x обозначать через x_n, то есть

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \to \ \exists\, x_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(a) : \ f(x_n) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

Но это означает, что для последовательности $\{x_n\}$ имеем

$$x_n \neq a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq A,$$

то есть A не является пределом функции f при $x \to a$ "по Гейне", что противоречит исходному условию.

Упражнение

Докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует.

Упражнение

Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

Классическое определение предела "по Коши" в точке:

Упражнение

Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует.

Классическое определение предела "по Коши" в точке:

Определение

Пусть функция f определена на $\mathring{U}(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции f при $x \to a$*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall\, x : \ 0 < |x - a| < \delta \ \to \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теорема

Пусть функции f, g, h определены на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \leqslant g \leqslant h$ на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Теорема

Пусть функции f, g, h определены на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \leqslant g \leqslant h$ на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Доказательство. Убедимся, что $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$ "по Гейне". Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\rightarrow\; x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(a), \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Имеем

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n).$$

Теорема

Пусть функции f, g, h определены на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \leqslant g \leqslant h$ на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Доказательство. Убедимся, что $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$ "по Гейне". Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \to \ x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(a), \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Имеем

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n).$$

Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n \to \infty} h(x_n) = A$, то в силу соответствующего свойства последовательностей получаем, что $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = A$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ из определения предела "по Гейне" заключаем, что $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Теорема (арифметические свойства пределов)

Пусть $a \in \hat{\mathbb{R}}$, функции f, g определены на $\mathring{U}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда

Теорема (арифметические свойства пределов)

Пусть $a \in \hat{\mathbb{R}}$, функции f, g определены на $\mathring{U}(a)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;

Теорема (арифметические свойства пределов)

Пусть $a \in \hat{\mathbb{R}}$, функции f, g определены на $\mathring{U}(a)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = AB$;

Теорема (арифметические свойства пределов)

Пусть $a \in \hat{\mathbb{R}}$, функции f, g определены на $\mathring{U}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$;
3. если дополнительно $g(x) \neq 0$ при $x \in \mathring{U}(a)$ и $B \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$