Математический анализ. Лекция XL

Ряд Тейлора

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

2 мая 2014 г.

Ряд Тейлора

Если функция $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и имеет в точке x_0 производные всех порядков (то есть f является бесконечно дифференцируемой в точке x_0 функцией), то степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0*.

Пусть $\exists\, f^{(n)}(x_0)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Запишем разложение функции f по формуле Тейлора:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x),$$

где $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ – многочлен Тейлора, $r_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. Заметим, что $S_n(x)$ является частичной суммой ряда Тейлора функции f. Поэтому для фиксированного x эквивалентны соотношения

$$\left[f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad [S_n(x) \to f(x) \text{ при } n \to \infty] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad [r_n(x) \to 0 \text{ при } n \to \infty].$$

Таким образом, для доказательства возможности разложения функции f в степенной ряд (то есть в ряд Тейлора) в данной точке x достаточно показать, что $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого нам понадобятся различные формы остаточного члена формулы Тейлора.

Теорема

Пусть производная $f^{(n+1)}$ функции f непрерывна на отрезке с концами в x_0 и x. Тогда остаточный член формулы Тейлора можно представить *в интегральной форме*:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad 0<\theta<1,$$

и *в форме Коши*:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, 0<\theta<1.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $x > x_0$. Установим сначала равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Применим метод математической индукции. При $n = 0$ эта формула совпадает с формулой Ньютона–Лейбница:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Предположим, что эта формула верна при $n - 1$ вместо n, то есть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Преобразуем интеграл в правой части с помощью интегрирования по частям:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Для доказательства

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

применим к интегралу

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

интегральную теорему о среднем, заметив, что множитель $(x - t)^n$ подынтегрального выражения не меняет знака. Тогда

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Для доказательства

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x - x_0)^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

применим к интегралу

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

ту же интегральную теорему о среднем, вынося за знак интеграла среднее значение всей подынтегральной функции. Тогда

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}[x - (x_0 + \theta(x - x_0))]^n(x - x_0),$$

что совпадает с требуемым равенством.

Перейдем к выводу разложений основных элементарных функций в ряд Тейлора, считая $x_0 = 0$ (в этом случае ряд Тейлора называют *рядом Маклорена*). Иначе говоря, для каждой рассматриваемой ниже функции f выясним, на каком множестве $E \subset \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Пример

$f(x) = e^x$. Покажем, что

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

так что для каждого фиксированного $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} e^{|x|} |x|^{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Радиус сходимости этого степенного ряда $R = +\infty$.

Пример

$f(x) = \sin x$. Покажем, что

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \pm \frac{1}{(n+1)!} \{\sin\theta x \cos\theta x\}\, x^{n+1},$$

так что для каждого фиксированного $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Радиус сходимости этого степенного ряда $R = +\infty$.

Пример

$f(x) = (1+x)^\alpha$ при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ (так что функция f не является многочленом). Производная $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Покажем, что

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{при} \quad |x| < 1.$$

Заметим, что радиус сходимости этого ряда $R = 1$, что легко установить, применяя признак Д'Аламбера для выяснения абсолютной сходимости этого ряда. Так что равенство данное равенство окажется справедливым на интервале сходимости ряда.
При $x = 0$ разложение очевидно.

Пусть $0 < |x| < 1$. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме имеет вид

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt.$$

Отсюда

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}\frac{\left|\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1}\frac{|x-t|}{1+t}\,dt\right|}{\left|\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt\right|}.$$

Заметим, что

$$\frac{|x-t|}{1+t} \leqslant \frac{|x|-|t|}{1-|t|} = |x|\frac{1-\frac{|t|}{|x|}}{1-|t|} \leqslant |x|.$$

Следовательно, при фиксированном x и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при $n \geqslant N$

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} \leqslant \frac{|n+1-\alpha|}{n+1}|x| \leqslant (1+\varepsilon)|x| = q < 1.$$

Это означает, что $|r_n(x)|$ стремится к нулю при $n \to \infty$ не медленнее, чем член убывающей геометрической прогрессии. Таким образом, требуемое разложение установлено.