Математический анализ. Лекция XXXIX

Функциональные ряды

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

16 апреля 2014 г.

Определение

Говорят, что функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k : \ E \to \mathbb{R}.$$

сходится на множестве E, если числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E,$$

сходится при каждом фиксированном $x \in E$.

Функциональные ряды

Определение

Говорят, что функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k : E \to \mathbb{R}.$$

сходится на множестве E, если числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E,$$

сходится при каждом фиксированном $x \in E$.
При этом говорят также, что функциональный ряд *сходится на* E *поточечно*.

Определение

Говорят, что функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k : \ E \to \mathbb{R}.$$

сходится на множестве E, если числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E,$$

сходится при каждом фиксированном $x \in E$.
При этом говорят также, что функциональный ряд *сходится на E поточечно*.

Таким образом, поточечная сходимость функционального ряда на E равносильна поточечной сходимости на E последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ его частичных сумм.

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

сходится на множестве E, то его *суммой* называется функция $S\colon E \to \mathbb{R}$ такая, что $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\ \forall\, x \in E$.

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

сходится на множестве E, то его *суммой* называется функция $S\colon E \to \mathbb{R}$ такая, что $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\ \forall\, x \in E$.

Определение

Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится на E равномерно*, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится на E равномерно.

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

сходится на множестве E, то его *суммой* называется функция $S\colon E \to \mathbb{R}$ такая, что $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\ \forall\, x \in E$.

Определение

Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится на E равномерно*, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится на E равномерно.

Другими словами

Определение

Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится на E равномерно*, если он сходится на E и если

$$\sup_E \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема (необходимое условие равномерной сходимости ряда)

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

равномерно сходится на E. Тогда его общий член

$$u_n \underset{E}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема (необходимое условие равномерной сходимости ряда)

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

равномерно сходится на E. Тогда его общий член

$$u_n \underset{E}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство следует из того, что $u_n = S_n - S_{n-1}$, $S_n \underset{E}{\rightrightarrows} S$, $S_{n-1} \underset{E}{\rightrightarrows} S$ при $n \to \infty$.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

сходится на E равномерно тогда и только тогда, когда выполняется *условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \sup_E \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \ \forall n \geqslant N, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Теорема (признак сравнения)

Пусть заданы функции $u_k\colon E \to \mathbb{R}$, $v_k\colon E \to [0, +\infty)$, причем

$$|u_k(x)| \leqslant v_k(x) \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится на E равномерно. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится на E абсолютно и равномерно.

Теорема (признак сравнения)

Пусть заданы функции $u_k\colon E \to \mathbb{R}$, $v_k\colon E \to [0, +\infty)$, причем

$$|u_k(x)| \leqslant v_k(x) \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится на E равномерно. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится на E абсолютно и равномерно.

Доказательство. Заметим, что при $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x).$$

В силу критерия Коши из равномерной сходимости ряда $\sum v_k$ следует , что

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\rightarrow\; \exists\, N \in \mathbb{N} : \; \sup_{x \in E} \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) < \varepsilon \;\forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \;\forall\, p \in \mathbb{N}.$$

В силу критерия Коши из равномерной сходимости ряда $\sum v_k$ следует , что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \sup_{x \in E} \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) < \varepsilon \ \forall n \geqslant n(\varepsilon), \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Значит, для этих же ε и N

$$\sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leqslant \sup_{x \in E} \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| < \varepsilon \ \forall n \geqslant N, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, в силу того же критерия Коши ряды $\sum u_k$ и $\sum |u_k|$ равномерно сходятся на E.

Частным случаем доказанной теоремы является

Теорема (признак Вейерштрасса)

Пусть $u_k\colon E \to \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, причем

$$|u_k(x)| \leqslant a_k \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится на E абсолютно и равномерно.

Частным случаем доказанной теоремы является

Теорема (признак Вейерштрасса)

Пусть $u_k\colon E \to \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, причем

$$|u_k(x)| \leqslant a_k \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится на E абсолютно и равномерно.

Определение

Последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, называется *равномерно ограниченной на E*, если

$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \ |f_n(x)| \leqslant M \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Следующие два признака относятся к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)u_k(x),$$

где $a_k\colon E \to \mathbb{R}$, $u_k\colon E \to \mathbb{R}$.

Теорема (признак Дирихле)

Пусть последовательность значений функций $a_k(x)$ при каждом $x \in E$ монотонна, и пусть $a_k \underset{E}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$. Пусть также частичные суммы ряда $\sum_{1}^{\infty} u_k$ функций u_k равномерно ограничены на E.

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)u_k(x),$$

равномерно сходится на E.

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x) =$$

$$= a_{n+p}(x)\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}(x) - a_k(x))\sum_{j=n+1}^{k} u_j(x).$$

В силу равномерной ограниченности частичных сумм ряда $\sum u_k(x)$, при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Тогда, используя монотонность последовательности $\{a_k(x)\}$ (по k), имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| \leqslant 2M|a_{n+p}(x)| + 2M\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)| =$$

$$= 2M|a_{n+p}(x)| + 2M\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x))\right| =$$

$$= 4M|a_{n+p}(x)| + 2M|a_{n+1}(x)|.$$

Из этого неравенства в силу $a_k \underset{E}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$, получаем, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| < \varepsilon \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Применяя критерий Коши, получаем, что ряд сходится на E равномерно.

Теорема (признак Абеля)

Пусть последовательность $\{a_k(x)\}$ функций равномерно ограничена на множестве E, и пусть при каждом $x \in E$ последовательность $\{a_k(x)\}$ монотонна. Пусть также ряд $\sum u_k(x)$ равномерно сходится на E.
Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) u_k(x),$$

сходится на E равномерно.

Доказательство. По определению равномерной ограниченности функциональной последовательности $\{a_k(x)\}$ при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$|a_k(x)| \leqslant M \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Из равномерной сходимости ряда $\sum u_k$ и критерия Коши имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

$$\forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Используя монотонность последовательности $\{a_k(x)\}$, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) u_k(x) \right| \leqslant M\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)| =$$

$$= M\varepsilon + \varepsilon \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x)) \right| =$$

$$= M\varepsilon + \varepsilon |a_{n+p}(x) - a_{n+1}(x)| \leqslant M\varepsilon + 2M\varepsilon = 3M\varepsilon.$$

В силу критерия Коши отсюда следует равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) u_k(x),$$

на множестве E.