Математический анализ. Лекция XXXVIII

Знакопеременные ряды

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

11 апреля 2014 г.

Теорема (признак Лейбница)

Пусть $\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; \to \;\; a_k \geqslant a_{k+1} > 0$; $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда *знакочередующийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

сходится.

Знакопеременные ряды

Теорема (признак Лейбница)

Пусть $\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; \to \;\; a_k \geqslant a_{k+1} > 0$; $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда *знакочередующийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

сходится.

При этом остаток ряда $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого из его членов:

$$|r_n| \leqslant a_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм четного порядка $\{S_{2n}\}_1^\infty$ последовательности частичных сумм ряда

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) =$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм четного порядка $\{S_{2n}\}_1^\infty$ последовательности частичных сумм ряда

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) =$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Ясно, что $\{S_{2n}\}_1^\infty$ возрастает и что $0 \leqslant S_{2n} \leqslant a_1$. Следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}_1^\infty$ сходится:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \in [0, a_1].$$

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм четного порядка $\{S_{2n}\}_1^\infty$ последовательности частичных сумм ряда

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) =$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Ясно, что $\{S_{2n}\}_1^\infty$ возрастает и что $0 \leqslant S_{2n} \leqslant a_1$. Следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}_1^\infty$ сходится:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \in [0, a_1].$$

Подпоследовательность $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ частичных сумм нечетного порядка последовательности $\{S_n\}_1^\infty$ также сходится и притом к тому же пределу S, поскольку $S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \to S - 0 = S$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм четного порядка $\{S_{2n}\}_1^\infty$ последовательности частичных сумм ряда

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) =$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Ясно, что $\{S_{2n}\}_1^\infty$ возрастает и что $0 \leqslant S_{2n} \leqslant a_1$. Следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}_1^\infty$ сходится:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \in [0, a_1].$$

Подпоследовательность $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ частичных сумм нечетного порядка последовательности $\{S_n\}_1^\infty$ также сходится и притом к тому же пределу S, поскольку $S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \to S - 0 = S$ при $n \to \infty$.
Из сходимости последовательностей $\{S_{2n}\}_1^\infty$ и $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ к одному и тому же числу S следует, как нетрудно заметить, сходимость $S_n \to S$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм четного порядка $\{S_{2n}\}_1^\infty$ последовательности частичных сумм ряда

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) =$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Ясно, что $\{S_{2n}\}_1^\infty$ возрастает и что $0 \leqslant S_{2n} \leqslant a_1$. Следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}_1^\infty$ сходится:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \in [0, a_1].$$

Подпоследовательность $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ частичных сумм нечетного порядка последовательности $\{S_n\}_1^\infty$ также сходится и притом к тому же пределу S, поскольку $S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \to S - 0 = S$ при $n \to \infty$.
Из сходимости последовательностей $\{S_{2n}\}_1^\infty$ и $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ к одному и тому же числу S следует, как нетрудно заметить, сходимость $S_n \to S$ при $n \to \infty$.
Пусть теперь r_n – остаток ряда после n-го члена:

$$(-1)^{n+1} r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots$$

Значит $0 \leqslant (-1)^{n+1} r_n \leqslant a_{n+1}$.

Рассмотрим преобразование конечной суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Пусть

$$B_0 \in \mathbb{R}, \quad B_k = B_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j \quad (k = 1, \dots, n).$$

Тогда $b_k = B_k - B_{k-1}$ $(k = 1, \dots, n)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}.$$

Заменив в последней сумме индекс суммирования k на $k+1$, получаем формулу

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k,$$

называемую *преобразованием Абеля* суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Установим некоторые признаки сходимости рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Теорема (признак Дирихле)

Пусть числовая последовательность $\{a_k\}_1^{\infty}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ограничена.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. При $B_0 = 0$ применим преобразование Абеля к частичной сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. Изучим поведение правой части преобразования Абеля при $n \to \infty$.
$a_n B_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$ и условия $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Сумма в правой части преобразования Абеля стремится к конечному пределу, поскольку является частичной суммой сходящегося ряда.
В самом деле, если $M = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |B_k|$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(a_{k+1} - a_k)B_k| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| =$$

$$= M \left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \right| = M|a_1|.$$

Следовательно, и левая часть преобразования Абеля стремится к тому же пределу при $n \to \infty$, что и означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Теорема (признак Абеля)

Пусть числовая последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Теорема (признак Абеля)

Пусть числовая последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. Пусть $a_k \to a_0$ при $k \to \infty$. Тогда $\alpha_k = a_k - a_0 \to 0$ при $k \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Первый из двух рядов правой части равенства сходится по признаку Дирихле, а второй – по условию. Следовательно, сходится и ряд, стоящий в левой части равенства.