Математический анализ. Лекция XXXVII

Абсолютно сходящиеся числовые ряды

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

9 апреля 2014 г.

Признаки Д'Аламбера и Коши

Теорема (признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0 \; \forall\, k \in \mathbb{N}$. Тогда

1. если существует число $q < 1$ такое, что при некотором k_0

$$\forall\, k \geqslant k_0 \;\to\; \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

Признаки Д'Аламбера и Коши

Теорема (признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Тогда

1. если существует число $q < 1$ такое, что при некотором k_0

$$\forall\, k \geqslant k_0 \ \to\ \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

2. если при некотором k_0

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1°. При $k \geqslant k_0$ из $a_{k+1} \leqslant q a_k$ следует, что

$$a_k \leqslant q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k.$$

Доказательство. 1°. При $k \geqslant k_0$ из $a_{k+1} \leqslant q a_k$ следует, что

$$a_k \leqslant q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k.$$

Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ в силу признака сравнения.

Доказательство. 1°. При $k \geqslant k_0$ из $a_{k+1} \leqslant q a_k$ следует, что

$$a_k \leqslant q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k.$$

Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ в силу признака сравнения.

2°. Из $a_{k+1} \geqslant a_k > 0$ следует, что общий член ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не стремится к нулю. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Теорема (предельный признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, и пусть

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда

1. если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

Теорема (предельный признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0 \; \forall \, k \in \mathbb{N}$, и пусть

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда

1. если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
2. если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

Теорема (предельный признак Д'Аламбера)

Пусть $a_k > 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, и пусть

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда

1. если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
2. если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;
3. если $q = 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon > 0$, $q' = q + \varepsilon < 1$.

Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $a_{k+1} \leqslant q' a_k\ \forall\, k \geqslant k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon > 0$, $q' = q + \varepsilon < 1$.

Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $a_{k+1} \leqslant q' a_k \ \forall\, k \geqslant k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2°. Пусть $q > 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $a_k \geqslant 1 \ \forall\, k \geqslant k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon > 0$, $q' = q + \varepsilon < 1$.

Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $a_{k+1} \leqslant q' a_k \ \forall\, k \geqslant k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2°. Пусть $q > 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $a_k \geqslant 1 \ \forall\, k \geqslant k_0$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, хотя для каждого из них $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$.

Теорема (признак Коши)

Пусть $a_k \geqslant 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Тогда

1. если существует число $q < 1$ такое, что при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

то ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

Теорема (признак Коши)

Пусть $a_k \geqslant 0 \; \forall \, k \in \mathbb{N}$. Тогда

1. если существует число $q < 1$ такое, что при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$
$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1 \quad \forall \, k \geqslant k_0,$$
то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
2. если
$$\forall \, k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists \, k \geqslant k_0 : \; \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1,$$
то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1°. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ и оценки $a_k \leqslant q^k$ (для всех $k \geqslant k_0$) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения.

Доказательство. 1°. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ и оценки $a_k \leqslant q^k$ (для всех $k \geqslant k_0$) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения.

2°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Теорема (предельный признак Коши)

Пусть $a_k \geqslant 0 \; \forall \, k \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда

1. если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

Теорема (предельный признак Коши)

Пусть $a_k \geqslant 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда

1. если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
2. если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

Теорема (предельный признак Коши)

Пусть $a_k \geqslant 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ и
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда

1. если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;
2. если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;
3. если $q = 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Доказательство. 1°. Пусть $q < q_0 < 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q_0 < 1 \ \forall\, k \geqslant k_0$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по предыдущей теореме.

Доказательство. 1°. Пусть $q < q_0 < 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q_0 < 1 \;\forall\, k \geqslant k_0$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по предыдущей теореме.

2°. $\forall\, k_0 \in \mathbb{N} \;\to\; \exists\, k \geqslant k_0$: $\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1°. Пусть $q < q_0 < 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q_0 < 1\ \forall\, k \geqslant k_0$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по предыдущей теореме.

2°. $\forall\, k_0 \in \mathbb{N} \ \to\ \exists\, k \geqslant k_0$: $\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$. По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ сходится, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, хотя для каждого из них $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$.

Абсолютно сходящиеся ряды

Определение

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Абсолютно сходящиеся ряды

Определение

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Теорема

Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ для него выполнено условие Коши. Поскольку

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k| \quad \text{при} \quad m \leqslant n,$$

то условие Коши выполняется и для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ для него выполнено условие Коши. Поскольку

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k| \quad \text{при} \quad m \leqslant n,$$

то условие Коши выполняется и для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Определение

Пусть заданы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и отображение $k \to n_k$, являющееся взаимно однозначным соответствием $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ называют *рядом с переставленными членами* по отношению к ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$, полученный перестановкой членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, сходится абсолютно. При этом их суммы равны:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Теорема

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$, полученный перестановкой членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, сходится абсолютно. При этом их суммы равны:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$, то есть сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$, следует из ограниченности последовательности частичных сумм последнего:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k^*| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^*$.

Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^*$.
Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется, такое $N = N(n) > n$, что все слагаемые суммы S_n^* содержатся в сумме S_N. Тогда при $m \geqslant N$

$$|S_m - S_n^*| \leqslant |a_{n+1}^*| + |a_{n+2}^*| + \ldots = \rho_n^*,$$

где ρ_n^* – остаток после n-го члена ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$.

Пусть $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^*$.
Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется, такое $N = N(n) > n$, что все слагаемые суммы S_n^* содержатся в сумме S_N. Тогда при $m \geqslant N$

$$|S_m - S_n^*| \leqslant |a_{n+1}^*| + |a_{n+2}^*| + \ldots = \rho_n^*,$$

где ρ_n^* – остаток после n-го члена ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$.
Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$|S - S_n^*| \leqslant \rho_n^* \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Но $\rho_n^* \to 0$ при $n \to 0$ как остаток сходящегося ряда.

Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^*$.
Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется, такое $N = N(n) > n$, что все слагаемые суммы S_n^* содержатся в сумме S_N. Тогда при $m \geqslant N$

$$|S_m - S_n^*| \leqslant |a_{n+1}^*| + |a_{n+2}^*| + \ldots = \rho_n^*,$$

где ρ_n^* – остаток после n-го члена ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$.
Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$|S - S_n^*| \leqslant \rho_n^* \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Но $\rho_n^* \to 0$ при $n \to 0$ как остаток сходящегося ряда.Следовательно, $S_n^* \to S$ при $n \to \infty$, что равносильно равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Теорема

Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно.
Тогда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j},$$

составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и его сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

Теорема

Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно.

Тогда ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j},$$

составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и его сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ сходится абсолютно, поскольку ограничена последовательность частичных сумм ряда из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{k_j}||b_{m_j}| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\right).$$

Поскольку сумма ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ не зависит от перестановки его членов, будем считать, что члены ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ расположены в таком порядке, что

$$S_{n^2} = \sum_{j=1}^{n^2} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку сумма ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ не зависит от перестановки его членов,

будем считать, что члены ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ расположены в таком порядке, что

$$S_{n^2} = \sum_{j=1}^{n^2} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что подпоследовательность $\{S_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ сходится к числу $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\right)$. Так как ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}$ сходящийся, то последовательность его частичных сумм сходится к этому же числу.