Математический анализ. Лекция XXXV

Несобственные интегралы

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

2 апреля 2014 г.

Определение

Пусть функция $f\colon [a;b) \to \mathbb{R}$, $b \leqslant +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;b'] \subset [a;b)$.
Символ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

называется *несобственным интегралом* (*Римана*) по полуинтервалу $[a;b)$.
Говорят, что несобственный интеграл *сходится*, и пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx,$$

если указанный предел существует, и что несобственный интеграл *расходится* – в противном случае.

Здесь и далее символ $+\infty - 0$ равнозначен символу $+\infty$.
В случае сходимости несобственным интегралом называют не только символ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, но и число $\displaystyle\lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx$.

Упражнение

Докажите, что если функция ограничена на отрезке $[a;b]$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;b'] \subset [a;b)$, то она интегрируема по Риману на $[a;b]$, и, следовательно, ее интеграл Римана по $[a;b]$ и несобственный интеграл по $[a;b)$ совпадают.

Теорема (критерий Коши сходимости несобственного интеграла)

Пусть функция f интегрируема на любом отрезке $[a; b'] \subset [a; b)$. Тогда для сходимости несобственного интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие Коши*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \to \;\; \exists\, b_\varepsilon \in [a; b) : \;\; \forall\, b', b'' \in [b_\varepsilon, b) \; \left| \int_{b'}^{b''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Сходимость несобственного интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ по определению равносильна существованию предела функции $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ при $x \to b - 0$, что эквивалентно выполнению условия Коши существования конечного предела функции F. Последнее же совпадает с утверждением теоремы.

Ряд свойств определенного интеграла переносится на несобственные интегралы с помощью предельного перехода при $b' \to b - 0$.

- Пусть несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ сходится. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a^*} f(x)\,dx + \int_{a^*}^b f(x)\,dx \quad \forall\, a^* \in [a; b).$$

- (Линейность). Пусть несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся. Тогда при λ, $\mu \in \mathbb{R}$ сходится и несобственный интеграл

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

- (Интегрирование неравенств). Пусть интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся, и пусть $f \leqslant g$ на $[a; b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

- (Формула Ньютона–Лейбница). Пусть функция f непрерывна на $[a; b)$, $\varPhi$ – первообразная для f на $[a; b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varPhi(b-0) - \varPhi(a),$$

если конечна хотя бы одна из частей равенства этого равенства.
- (Интегрирование по частям). Пусть функции u, v: $[a; b) \to \mathbb{R}$ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a; b'] \subset [a; b)$. Тогда

$$\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx,$$

если оба слагаемых в правой части равенства существуют и конечны.
- (Замена переменного). Пусть функция f непрерывна на $[a; b)$, функция φ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, $\beta \leqslant +\infty$, причем $a = \varphi(a) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

При этом интегралы в обеих частях этой формулы сходятся или расходятся одновременно.

Теорема

Пусть $f \geqslant 0$ на $[a; b)$. Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant M \quad \forall\, b' \in [a; b).$$

Доказательство. Интеграл $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ как функция аргумента b' возрастает. Поэтому сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ (то есть существование конечного предела этой функции при $b' \to b - 0$) равносильна ограниченности интеграла $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ как функции b'.

Теорема (признак сравнения)

Пусть функции f, g интегрируемы на любом отрезке $[a;b'] \subset [a;b)$ и $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a;b)$. Тогда

1. сходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ влечет за собой сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$;
2. расходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ влечет за собой расходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. 1°. Пусть интеграл $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ сходится. Тогда по предыдущей теореме

$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \quad \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b'} g(x)\,dx \leqslant M \quad \forall\, b' \in [a;b).$$

По той же теореме интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

2°. Расходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ легко доказывается от противного.

Следствие

Пусть функции f, g интегрируемы на любом отрезке $[a; b'] \subset [a; b)$, и пусть $f > 0$, $g > 0$ на $[a; b)$. Пусть также

$$\exists \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty).$$

Тогда интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. В условиях теоремы

$$\exists\, a^* \in [a; b) : \ \forall x \in [a^*, b) \ \to \ \frac{k}{2} g(x) \leqslant f(x) \leqslant 2kg(x).$$

В силу предыдущей теоремы интегралы

$$\int_{a^*}^b g(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{a^*}^b f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно. Теперь остается учесть, что сходимость последних двух интегралов не зависит от выбора $a^* \in [a; b)$.

Определение

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема

Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Доказательство. Заметим, что из сходимости интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ следует, что для него выполняется условие Коши. Но тогда условие Коши выполняется и для интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ в силу оценки

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \quad \text{при} \quad a \leqslant b' < b'' < b.$$

Применяя критерий Коши к интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$, убеждаемся, что он сходится.

Кроме того, из последнего неравенства следует, что в условиях теоремы

Замечание

Сходимость несобственного интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ не дает права написать символ $\int_a^b f(x)\,dx$, поскольку функция f может не быть интегрируемой на некотором отрезке $[a; b']$, в то время как ее модуль интегрируем на этом отрезке.