Математический анализ. Лекция XXXIV
Связь между определенным и неопределенным интегралами

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

28 марта 2014 г.

Связь между определенным и неопределенным интегралами

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$. Тогда на $[a; b]$ определена функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

называемая *интегралом с переменным верхним пределом*.

Связь между определенным и неопределенным интегралами

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда на $[a;b]$ определена функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

называемая *интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда функция F непрерывна на $[a;b]$.

Доказательство. Пусть x_0, $x_0 + \Delta x \in [a; b]$. Тогда

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть x_0, $x_0 + \Delta x \in [a; b]$. Тогда

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

На $[a; b]$ функция f ограничена (поскольку она интегрируема), так что при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| \leqslant M \quad \forall\, t \in [a; b].$$

Доказательство. Пусть x_0, $x_0 + \Delta x \in [a; b]$. Тогда

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

На $[a; b]$ функция f ограничена (поскольку она интегрируема), так что при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| \leqslant M \quad \forall\, t \in [a; b].$$

Следовательно,

$$|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| \leqslant M|\Delta x| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

что и требовалось показать.

Теорема

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ имеет производную в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

(под $F'(x_0)$ в случае $x_0 = a$ или $x_0 = b$ подразумевается односторонняя производная).

Теорема

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ имеет производную в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

(под $F'(x_0)$ в случае $x_0 = a$ или $x_0 = b$ подразумевается односторонняя производная).

Доказательство. Вычитая из $\dfrac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}$ предполагаемый предел $f(x_0)$, при $x_0 + \Delta x \in [a; b]$ имеем

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt.$$

Теорема

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ имеет производную в точке x_0 и

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

(под $F'(x_0)$ в случае $x_0 = a$ или $x_0 = b$ подразумевается односторонняя производная).

Доказательство. Вычитая из $\dfrac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}$ предполагаемый предел $f(x_0)$, при $x_0 + \Delta x \in [a; b]$ имеем

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности f в точке x_0

$$\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ если } t \in [a; b],\ |t - x_0| < \delta.$$

Следовательно, при $|\Delta x| < \delta$

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1\, dt = \varepsilon.$$

Следовательно, при $|\Delta x| < \delta$

$$\left| \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| \leqslant \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1 \, dt = \varepsilon.$$

Но это означает, что

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} \to f(x_0) \quad \text{при} \quad x_0 + \Delta x \in [a; b], \; \Delta x \to 0,$$

что и требовалось показать.

Пусть функция f интегрируема на $[a; b]$. Тогда на $[a; b]$ определена функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad x \in [a; b],$$

называемая *интегралом с переменным нижним пределом.*

Пусть функция f интегрируема на $[a; b]$. Тогда на $[a; b]$ определена функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad x \in [a; b],$$

называемая *интегралом с переменным нижним пределом*.
Поскольку

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x),$$

то функция G непрерывна на $[a; b]$. Если же f непрерывна в точке $x_0 \in [a; b]$, то существует $G'(x_0)$ и

$$G'(x_0) = -F'(x_0) = -f(x_0).$$

Теорема

Пусть функция f непрерывна на интервале $(a; b)$. Тогда она имеет на $(a; b)$ первообразную

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad \text{где} \quad x_0 \in (a; b).$$

Теорема

Пусть функция f непрерывна на интервале $(a; b)$. Тогда она имеет на $(a; b)$ первообразную

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad \text{где} \quad x_0 \in (a; b).$$

Доказательство следует из предыдущей теоремы.

Теорема (основная теорема интегрального исчисления)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и Φ – ее первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi\Big|_a^b,$$

где $\Phi\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Теорема (основная теорема интегрального исчисления)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и Φ – ее первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi\Big|_a^b,$$

где $\Phi\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

Теорема (основная теорема интегрального исчисления)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и Φ – ее первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi\Big|_a^b,$$

где $\Phi\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

Доказательство. Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции f на отрезке $[a; b]$. Поэтому $F(x) = \Phi(x) + C$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

Теорема (основная теорема интегрального исчисления)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и Φ – ее первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi\Big|_a^b,$$

где $\Phi\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

Доказательство. Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции f на отрезке $[a; b]$. Поэтому $F(x) = \Phi(x) + C$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Отсюда

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = (\Phi(x) + C) - (\Phi(a) + C) =$$

$$= \Phi(x) - \Phi(a), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Теорема (основная теорема интегрального исчисления)

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и Φ – ее первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi\Big|_a^b,$$

где $\Phi\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

Доказательство. Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции f на отрезке $[a; b]$. Поэтому $F(x) = \Phi(x) + C$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Отсюда

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = (\Phi(x) + C) - (\Phi(a) + C) =$$

$$= \Phi(x) - \Phi(a), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Последнее равенство при $x = b$ совпадает с утверждением теоремы.

Упражнение

Пусть на $[a; b]$ функция f интегрируема и имеет первообразную F. Доказать, что $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Замена переменной

Теорема о замене переменной

Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция f непрерывна на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Замена переменной

Теорема о замене переменной

Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция f непрерывна на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть Φ – первообразная для f на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$. Тогда $\Phi(\varphi)$ – первообразная для $f(\varphi)\varphi'$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, поскольку $(\Phi(\varphi))'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, где производные при $t = \alpha$ и при $t = \beta$ понимаются как односторонние.

Замена переменной

Теорема о замене переменной

Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция f непрерывна на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть Φ – первообразная для f на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$. Тогда $\Phi(\varphi)$ – первообразная для $f(\varphi)\varphi'$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, поскольку $(\Phi(\varphi))'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, где производные при $t = \alpha$ и при $t = \beta$ понимаются как односторонние.

Дважды воспользовавшись формулой Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Замена переменной

Теорема о замене переменной

Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция f непрерывна на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть Φ – первообразная для f на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$. Тогда $\Phi(\varphi)$ – первообразная для $f(\varphi)\varphi'$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, поскольку $(\Phi(\varphi))'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, где производные при $t = \alpha$ и при $t = \beta$ понимаются как односторонние.

Дважды воспользовавшись формулой Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Из этих двух равенств вытекает утверждение теоремы.

Упражнение

Докажите, что если функция φ' непрерывна на $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то из существования одного из интегралов формулы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

следует существование другого интеграла и их равенство.

Интегрирование по частям

Теорема (интегрирование по частям)

Пусть функции u, v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Теорема (интегрирование по частям)

Пусть функции u, v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Доказательство. Из равенства

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

следует, что

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b (u(x)v(x))'\,dx - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Интегрирование по частям

Теорема (интегрирование по частям)

Пусть функции u, v непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Доказательство. Из равенства

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

следует, что

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b (u(x)v(x))'\,dx - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Остается заметить, что по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Определение

Функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой* на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на $[a;b]$ и существует разбиение $\{a_i\}_0^k$ отрезка $[a;b]$, при котором производная f' непрерывна на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$, если в его концах производную понимать как одностороннюю.

Обобщим понятие определенного интеграла.

Определение

Интегралом по отрезку $[a; b]$ *функции* f, определенной на отрезке $[a; b]$ за исключением конечного числа точек, называется число

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx,$$

если стоящий справа интеграл существует, где $\tilde{f}\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ – функция f, каким-либо образом доопределенная в этих точках.

Обобщим понятие определенного интеграла.

Определение

Интегралом по отрезку $[a;b]$ *функции* f, определенной на отрезке $[a;b]$ за исключением конечного числа точек, называется число

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx,$$

если стоящий справа интеграл существует, где $\tilde{f}\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ – функция f, каким-либо образом доопределенная в этих точках.

Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ определен здесь корректно, так как $\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$ не зависит от способа доопределения функции f.

Теорема (интегрирование по частям)

Пусть функции u, v непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Теорема (интегрирование по частям)

Пусть функции u, v непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Доказательство. В силу определения кусочно непрерывно дифференцируемых функций существует разбиение $\{a_i\}_0^k$ отрезка $[a; b]$, при котором функции u, v непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, \dots, k)$. В силу предыдущего определения

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} u(x)v'(x)\,dx.$$

Применяя к каждому слагаемому правой части предыдущую теорему, получаем, что

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \left(u(x)v(x)\Big|_{a_{i-1}}^{a_i} - \int_{a_{i-1}}^{a_i} u'(x)v(x)\,dx \right) =$$

$$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$