Математический анализ. Лекция XXXII

Определенный интеграл

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

21 марта 2014 г.

Определение

Разбиением τ *отрезка* $[a; b]$ называется произвольная конечная система его точек $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ такая, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau - 1} < x_{i_\tau} = b$.
Каждый из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ называется *отрезком разбиения* τ, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Величина $|\tau| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \Delta x_i$ называется *мелкостью разбиения* τ.

Определение

Разбиением τ *отрезка* $[a; b]$ называется произвольная конечная система его точек $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ такая, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau - 1} < x_{i_\tau} = b$.
Каждый из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ называется *отрезком разбиения* τ, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Величина $|\tau| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \Delta x_i$ называется *мелкостью разбиения* τ.

Будем говорить, что разбиение τ' *следует за разбиением* τ, или *является измельчением* разбиения τ, и писать $\tau' \succ \tau$, если каждая точка разбиения τ является точкой разбиения τ'.

Разбиения данного отрезка обладают следующими свойствами:

1. если $\tau_1 \succ \tau_2$, $\tau_2 \succ \tau_3$, то $\tau_1 \succ \tau_3$;
2. для любых τ_1, τ_2 существует τ: $\tau \succ \tau_1$, $\tau \succ \tau_2$.

Разбиения данного отрезка обладают следующими свойствами:

1. если $\tau_1 \succ \tau_2$, $\tau_2 \succ \tau_3$, то $\tau_1 \succ \tau_3$;
2. для любых τ_1, τ_2 существует τ: $\tau \succ \tau_1$, $\tau \succ \tau_2$.

Первое свойство очевидно. Для доказательства второго достаточно в качестве τ взять разбиение, содержащее все точки разбиения τ_1 и все точки разбиения τ_2.

Разбиения данного отрезка обладают следующими свойствами:

1. если $\tau_1 \succ \tau_2$, $\tau_2 \succ \tau_3$, то $\tau_1 \succ \tau_3$;
2. для любых τ_1, τ_2 существует τ: $\tau \succ \tau_1$, $\tau \succ \tau_2$.

Первое свойство очевидно. Для доказательства второго достаточно в качестве τ взять разбиение, содержащее все точки разбиения τ_1 и все точки разбиения τ_2.

Пусть на отрезке $[a; b]$ определена функция f и $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ – разбиение этого отрезка. Отметим в каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ какую-нибудь точку ξ_i и составим сумму

$$S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

называемую *интегральной суммой Римана* функции f.

Определение

Определенным интегралом Римана функции f на отрезке $[a;b]$ называется число I, обладающее свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

для любых τ с мелкостью $|\tau| < \delta$ и для любого набора отмеченных точек ξ_1, $\ldots$, ξ_{i_τ}. Число I обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Определение

Определенным интегралом Римана функции f на отрезке $[a; b]$ называется число I, обладающее свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

для любых τ с мелкостью $|\tau| < \delta$ и для любого набора отмеченных точек ξ_1, $\ldots$, ξ_{i_τ}. Число I обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Определение

Функцию f называют *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a; b]$, если существует $\int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема

Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема

Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция f неограничена на отрезке $[a; b]$. Покажем, что она не интегрируема на $[a; b]$. Для произвольного разбиения τ отрезка представим сумму Римана функции f в виде

$$S_\tau(f) = S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_\tau \\ i \neq k}} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $[x_{k-1}; x_k]$ – такой отрезок разбиения τ, на котором f неограничена.

Теорема

Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция f неограничена на отрезке $[a; b]$. Покажем, что она не интегрируема на $[a; b]$. Для произвольного разбиения τ отрезка представим сумму Римана функции f в виде

$$S_\tau(f) = S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_\tau \\ i \neq k}} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $[x_{k-1}; x_k]$ – такой отрезок разбиения τ, на котором f неограничена. Сначала каким-либо образом выберем все отмеченные точки ξ_i, кроме ξ_k. Тогда правую часть можно сделать сколь угодно большой по модулю за счет выбора ξ_k. Следовательно, при любом разбиении τ интегральная сумма Римана $S_\tau(f)$ может быть сколь угодно большой по модулю (например, $|S_\tau(f)| > \dfrac{1}{|\tau|}$) при соответствующем выборе отмеченных точек. Значит, функция f не интегрируема на $[a; b]$.

Условие ограниченности функции, являясь необходимым, не является достаточным для интегрируемости функции, в чем можно убедиться на примере *функции Дирихле*:

$$f:\ [0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$$

Условие ограниченности функции, являясь необходимым, не является достаточным для интегрируемости функции, в чем можно убедиться на примере *функции Дирихле*:

$$f:\ [0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$$

Для этой функции при произвольном разбиении τ $S_\tau(f)=1$, если все отмеченные точки рациональны, и $S_\tau(f)=0$, если все отмеченные точки иррациональны.
Следовательно, функция Дирихле не является интегрируемой на $[0;1]$.

Критерий интегрируемости функции

Определение

Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$. Ее *колебанием* на этом отрезке называется число

$$\omega(f;[a;b]) = \sup_{x',x''\in[a;b]} |f(x') - f(x'')| = \sup_{[a;b]} f - \inf_{[a;b]} f.$$

Критерий интегрируемости функции

Определение

Пусть функция f определена на отрезке $[a; b]$. Ее *колебанием* на этом отрезке называется число

$$\omega(f; [a; b]) = \sup_{x', x'' \in [a; b]} |f(x') - f(x'')| = \sup_{[a;b]} f - \inf_{[a;b]} f.$$

Для f, определенной на отрезке $[a; b]$, и для разбиения $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ этого отрезка положим $\omega_i(f) = \omega(f; [x_{i-1}, x_i])$.

Критерий интегрируемости функции

Определение

Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$. Ее *колебанием* на этом отрезке называется число

$$\omega(f;[a;b]) = \sup_{x',x''\in[a;b]} |f(x') - f(x'')| = \sup_{[a;b]} f - \inf_{[a;b]} f.$$

Для f, определенной на отрезке $[a;b]$, и для разбиения $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ этого отрезка положим $\omega_i(f) = \omega(f;[x_{i-1},x_i])$.

Теорема (критерий интегрируемости функции)

Для интегрируемости функции f на $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\to\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \;\forall\,\tau = \{x_i\}_1^{i_\tau} : \;|\tau| < \delta \;\to\; \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$, и пусть $\int_a^b f(x)\,dx = I$. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\rightarrow\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \;\forall\,\tau : \;|\tau| < \delta, \;\forall\,\xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau} \;\rightarrow\; |S_\tau(f) - I| < \varepsilon.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция f интегрируема на $[a;b]$, и пусть $\int_a^b f(x)\,dx = I$. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\to\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\; \forall\,\tau:\; |\tau| < \delta,\; \forall\,\xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau} \;\to\; |S_\tau(f) - I| < \varepsilon.$$

Зафиксируем ε, δ и τ. Пусть ξ_i', ξ_i'' – две такие точки интервала $[x_{i-1}, x_i]$, что $\omega_i(f) \leqslant 2(f(\xi_i') - f(\xi_i''))$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant 2\sum_{i=1}^{i_\tau}(f(\xi_i') - f(\xi_i''))\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant 2|I - S_\tau(f;\xi_1', \ldots, \xi_{i_\tau}')| + 2|I - S_\tau(f;\xi_1'', \ldots, \xi_{i_\tau}'')| < 4\varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Покажем, что при $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{k}$, $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{k^*} \succ \tau$

$$|S_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_k) - S_{\tau^*}(f;\xi_1^*,\ldots,\xi_{k^*}^*)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega(f;[x_{i-1},x_i])\Delta x_i.$$

Пусть $x_i = x_{j_i}^*$ $\forall\, i = 0, \ldots, i_\tau$, то есть

$$x_{i-1} = x_{j_{i-1}}^* < \ldots < x_{j_i}^* = x_i.$$

Тогда

$$\left| f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} f(\xi_j^*)\Delta x_j^* \right| \leqslant \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} \omega_i(f)\Delta x_j^* = \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Достаточность. Покажем, что при $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{k}$, $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{k^*} \succ \tau$

$$|S_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_k) - S_{\tau^*}(f;\xi_1^*,\ldots,\xi_{k^*}^*)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega(f;[x_{i-1},x_i])\Delta x_i.$$

Пусть $x_i = x_{j_i}^*$ $\forall\, i = 0, \ldots, i_\tau$, то есть

$$x_{i-1} = x_{j_{i-1}}^* < \ldots < x_{j_i}^* = x_i.$$

Тогда

$$\left| f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} f(\xi_j^*)\Delta x_j^* \right| \leqslant \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} \omega_i(f)\Delta x_j^* = \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Пусть теперь разбиения τ', τ'' отрезка $[a;b]$ произвольны. Возьмем разбиение τ^*: $\tau^* \succ \tau'$, $\tau^* \succ \tau''$. Тогда получаем

$$|S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| \leqslant |S_{\tau'}(f) - S_{\tau^*}(f)| + |S_{\tau''}(f) - S_{\tau^*}(f)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k'} \omega(f;[x'_{i-1},x'_i])\Delta x'_i + \sum_{i=1}^{k''} \omega(f;[x''_{i-1},x''_i])\Delta x''_i.$$

Таким образом

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \to \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ |S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| < \varepsilon, \text{ если } |\tau'|, |\tau''| < \delta.$$

Таким образом

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\to\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0: \; |S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| < \varepsilon, \text{ если } |\tau'|, |\tau''| < \delta.$$

Возьмем произвольную последовательность разбиений $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $|\tau_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого разбиения $\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{k_n}$, отметив произвольно точки $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}$, составим сумму Римана $S_{\tau_n}(f)$. Рассмотрим числовую последовательность $\{S_{\tau_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$. Она является фундаментальной. Следовательно, по критерию Коши последовательность $\{S_{\tau_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится. Пусть

$$I = \lim_{n\to\infty} S_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}).$$

Далее,

$$|S_{\tau_n}(f) - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \omega(f;[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}])\Delta x_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$|I - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Откуда следует интегрируемость функции f на $[a; b]$.

Далее,

$$|S_{\tau_n}(f) - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \omega(f; [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}])\Delta x_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$|I - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Откуда следует интегрируемость функции f на $[a; b]$.

Замечание

Оценка

$$|I - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

показывает, с какой точностью интеграл может быть приближен интегральной суммой Римана. Эта оценка может использоваться при приближенном вычислении интеграла.

Определение

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a; b]$, и пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ – разбиение $[a; b]$. Пусть

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x).$$

Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \Delta x_i, \quad \overline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \Delta x_i$$

называют соответственно *нижней* и *верхней интегральными суммами Дарбу* функции f, отвечающими разбиению τ.

Определение

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a;b]$, и пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ – разбиение $[a;b]$. Пусть

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x).$$

Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \Delta x_i, \quad \overline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \Delta x_i$$

называют соответственно *нижней* и *верхней интегральными суммами Дарбу* функции f, отвечающими разбиению τ.

Ясно, что

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant S_\tau(f) \leqslant \overline{S_\tau}(f)$$

для любой интегральной суммы Римана $S_\tau(f)$.

Очевидно, что

$$\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Очевидно, что

$$\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

С помощью последнего равенства можно перефразировать критерий интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу:
для интегрируемости на отрезке $[a; b]$ ограниченной функции f необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\to\; \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\; \forall\,\tau :\; |\tau| < \delta \;\to\; \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon.$$

Теорема

Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

Теорема

Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Для определенности будем считать, что функция f возрастает на отрезке $[a; b]$. Тогда при $|\tau| < \delta$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_\tau}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant |\tau| \sum_{i=1}^{i_\tau}(f(x_i) - f(x_{i-1})) < \delta(f(b) - f(a)).$$

Теорема

Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Для определенности будем считать, что функция f возрастает на отрезке $[a; b]$. Тогда при $|\tau| < \delta$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_\tau}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant |\tau| \sum_{i=1}^{i_\tau}(f(x_i) - f(x_{i-1})) < \delta(f(b) - f(a)).$$

Следовательно, f интегрируема в силу критерия интегрируемости.

Теорема

Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.

Теорема

Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда по теореме Кантора она равномерно непрерывна на нем, так что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\to\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \;\omega(f; [c; d]) \leqslant \varepsilon, \text{ если } [c; d] \subset [a; b],\; d - c < \delta.$$

Следовательно, при произвольном $\varepsilon > 0$ для разбиения τ отрезка $[a; b]$ с мелкостью $|\tau| < \delta$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta x_i = \varepsilon(b - a).$$

В силу критерия интегрируемости функция f интегрируема на $[a; b]$.

Теорема

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна на интервале $(a; b)$.
Тогда она интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Теорема

Пусть функция f ограничена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна на интервале $(a; b)$.
Тогда она интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Пусть $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a; b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$. Тогда при любом разбиении τ отрезка $[a; b]$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{[x_{i-1},x_i]\not\subset[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} \omega_i(f)\Delta x_i +$$

$$+ \sum_{[x_{i-1},x_i]\subset[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} \omega_i(f)\Delta x_i = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Очевидно, что

$$\Sigma_1 \leqslant 2 \cdot 2M(\varepsilon + |\tau|).$$

Поскольку функция f непрерывна и, следовательно, интегрируема на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, то в силу критерия интегрируемости существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\Sigma_2 < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\tau| < \delta.$$

Очевидно, что

$$\Sigma_1 \leqslant 2 \cdot 2M(\varepsilon + |\tau|).$$

Поскольку функция f непрерывна и, следовательно, интегрируема на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, то в силу критерия интегрируемости существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\Sigma_2 < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\tau| < \delta.$$

Будем считать, что $\delta \leqslant \varepsilon$. Тогда при $|\tau| < \delta \leqslant \varepsilon$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = \Sigma_1 + \Sigma_2 < 8M\varepsilon + \varepsilon = (8M+1)\varepsilon.$$

Это означает, что функция f интегрируема на $[a; b]$.