Математический анализ. Лекция XXX

Формула Тейлора

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

14 марта 2014 г.

Пусть $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, и пусть все частные производные порядка m функции f непрерывны на $U_\delta(x^{(0)})$.
При этом предположении все ее частные производные до порядка m включительно непрерывны на $U_\delta(x^{(0)})$.
Рассмотрим функцию φ: $[0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = f(x^{(0)} + t\Delta x), \quad \text{где} \quad \Delta x = x - x^{(0)}.$$

Пусть $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, и пусть все частные производные порядка m функции f непрерывны на $U_\delta(x^{(0)})$.
При этом предположении все ее частные производные до порядка m включительно непрерывны на $U_\delta(x^{(0)})$.
Рассмотрим функцию φ: $[0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = f(x^{(0)} + t\Delta x), \quad \text{где} \quad \Delta x = x - x^{(0)}.$$

Функция φ имеет на отрезке $[0, 1]$ непрерывные производные порядка m, что вытекает из теоремы о дифференцируемости сложной функции. Поэтому для φ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Выражая производные функции φ через частные производные функции f, получаем, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x^{(0)})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_k} +$$

$$+ r_m(\Delta x),$$

$$r_m(\Delta x) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(x^{(0)} + \theta \Delta x)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_m}.$$

Выражая производные функции φ через частные производные функции f, получаем, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x^{(0)})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_k} +$$

$$+r_m(\Delta x),$$

$$r_m(\Delta x) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(x^{(0)} + \theta \Delta x)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_m}.$$

Полученная формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*.

При сделанных предположениях о функции f частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, совпадают. Поэтому формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно переписать в следующем виде:

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(x^{(0)})(\Delta x)^{\alpha} +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(x^{(0)} + \theta \Delta x)(\Delta x)^{\alpha},$$

где $D^{\alpha} f = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f$.

Из этой формулы при предположениях, что функция f m раз непрерывно дифференцируема на $U_\delta(x^{(0)})$ и что $|\Delta x| < \delta$, следует *формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*:

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x^{(0)})(\Delta x)^\alpha + r_m(\Delta x),$$

где

$$r_m(\Delta x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \Big(D^\alpha f(x^{(0)} + \theta \Delta x) - D^\alpha f(x^{(0)}) \Big) (\Delta x)^\alpha =$$

$$= \varepsilon(\Delta x) |\Delta x|^m, \quad \varepsilon(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Для получения разложения конкретных функций по формуле Тейлора без вычисления коэффициентов формулы с помощью дифференцирования используется

Теорема единственности

Пусть $m \in \mathbb{N}_0$,

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0},$$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} b_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Тогда $a_\alpha = b_\alpha \; \forall \, \alpha \colon |\alpha| \leqslant m$.

Для получения разложения конкретных функций по формуле Тейлора без вычисления коэффициентов формулы с помощью дифференцирования используется

Теорема единственности

Пусть $m \in \mathbb{N}_0$,

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0},$$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} b_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Тогда $a_\alpha = b_\alpha \; \forall \, \alpha \colon |\alpha| \leqslant m$.

Доказательство. После почленного вычитания приходим к тому, что достаочно доказать, что из равенства

$$0 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}$$

следует, что $c_\alpha = 0 \; \forall \, \alpha \colon |\alpha| \leqslant m$.

Покажем это. Зафиксируем $y = (y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ и при $\Delta x = ty$ получаем

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha \right) t^k + o(|t|^m) \text{ при } t \to 0.$$

Покажем это. Зафиксируем $y = (y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ и при $\Delta x = ty$ получаем

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha \right) t^k + o(|t|^m) \text{ при } t \to 0.$$

В силу ранее установленной теоремы единственности для случая $n = 1$ отсюда следует, что

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha = 0 \quad \forall\, k = 0, \ldots, m, \quad \forall\, y \neq \vec{0}.$$

Покажем это. Зафиксируем $y = (y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ и при $\Delta x = ty$ получаем

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha \right) t^k + o(|t|^m) \text{ при } t \to 0.$$

В силу ранее установленной теоремы единственности для случая $n = 1$ отсюда следует, что

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha = 0 \quad \forall\, k = 0, \ldots, m, \quad \forall\, y \neq \vec{0}.$$

Но тогда, обозначив через $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ произвольный мультииндекс длины $|\beta| = k$, имеем

$$0 = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_n^{\beta_n}} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha = \beta! c_\beta.$$

Отсюда следует, что

$$c_\beta = 0 \quad \forall\, \beta = |\beta| = k, \quad \forall\, k = 0, \ldots, m,$$

что и требовалось доказать.

Теорема

Пусть функция f m раз непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Тогда это равенство является формулой Тейлора функции f с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема

Пусть функция f m раз непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Тогда это равенство является формулой Тейлора функции f с остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство. Утверждение теоремы является непосредственным следствием предыдущей теоремы и формулы Тейлора с остаточым членом в форме Пеано.

Пример

Разложите по формуле Тейлора функцию $e^{x^2+y^2}$ двух переменных в окрестности точки $(0,0)$ с точностью до $o((x^2+y^2)^2)$ при $(x,y) \to (0,0)$.

Пример

Разложите по формуле Тейлора функцию $e^{x^2+y^2}$ двух переменных в окрестности точки $(0,0)$ с точностью до $o((x^2+y^2)^2)$ при $(x,y)\to(0,0)$.

Воспользуемся известным разложением

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(|t|^2) \text{ при } u \to 0.$$

Пример

Разложите по формуле Тейлора функцию $e^{x^2+y^2}$ двух переменных в окрестности точки $(0,0)$ с точностью до $o((x^2+y^2)^2)$ при $(x,y)\to(0,0)$.

Воспользуемся известным разложением

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(|t|^2) \text{ при } u \to 0.$$

Подставив в него $u = x^2 + y^2$, получаем, что $e^{x^2+y^2} = 1 + x^2 + y^2 + \dfrac{1}{2}x^4 + x^2y^2 + \dfrac{1}{2}y^4 + o((x^2+y^2)^2)$. В силу предыдущей теоремы это разложение и является искомым разложением функции по формуле Тейлора.

Определение меры по Жордану

Изложим теорию меры множеств, предложенную Жорданом.

Определение

Множество P, удовлетворяющее соотношению

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \subset P \subset \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n,$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, будем называть *блоком*.

Определение меры по Жордану

Изложим теорию меры множеств, предложенную Жорданом.

Определение

Множество P, удовлетворяющее соотношению

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \subset P \subset \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n,$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, будем называть *блоком*.

В случае $n = 1$ блок P представляет собой интервал, полуинтервал, отрезок, точку или пустое множество. В случае $n = 2$, $a_i < b_i$ $(i = 1, 2)$ блок P – прямоугольник, содержащий произвольное множество своих граничных точек.

Меру пустого множества положим равной нулю.

Меру пустого множества положим равной нулю.
Меру каждого из непустых блоков определим равенством

$$\mu P = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Меру пустого множества положим равной нулю.
Меру каждого из непустых блоков определим равенством

$$\mu P = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Таким образом, каждому блоку P поставлено в соответствие число – его мера μP. При этом выполнены следующие условия:

1. (неотрицательность меры) $\mu P \geqslant 0$;
2. (аддитивность меры) если $P = \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k$ (P, P_k – блоки) и $P_i \cap P_k = \varnothing$ при $i \neq k$, то
$$\mu P = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

Определение

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовем *блочным*, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Определение

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовем *блочным*, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Лемма

Совокупность блочных множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, то есть объединение, пересечение и разность двух блочных множеств также являются блочными множествами.

Определение

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовем *блочным*, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Лемма

Совокупность блочных множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, то есть объединение, пересечение и разность двух блочных множеств также являются блочными множествами.

Доказательство. Ясно, что пересечение двух блоков является блоком. Поэтому пересечение двух блочных множеств является блочным множеством.

Определение

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовем *блочным*, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Лемма

Совокупность блочных множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, то есть объединение, пересечение и разность двух блочных множеств также являются блочными множествами.

Доказательство. Ясно, что пересечение двух блоков является блоком. Поэтому пересечение двух блочных множеств является блочным множеством. Разность двух блоков является, как легко проверить, блочным множеством. Отсюда следует, что разность двух блочных множеств также является блочным множеством.

Определение

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовем *блочным*, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Лемма

Совокупность блочных множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, то есть объединение, пересечение и разность двух блочных множеств также являются блочными множествами.

Доказательство. Ясно, что пересечение двух блоков является блоком. Поэтому пересечение двух блочных множеств является блочным множеством. Разность двух блоков является, как легко проверить, блочным множеством. Отсюда следует, что разность двух блочных множеств также является блочным множеством.
Если A, B – блочные множества, то их объединение можно представить в виде

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B,$$

то есть в виде объединения двух непересекающихся блочных множеств. Отсюда следует, что $A \cup B$ – блочное множество.

Определим теперь меру μA блочного множества

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k, \quad P_i \cap P_k = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq k,$$

(где P_k – блоки) равенством

$$\mu A = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

Определим теперь меру μA блочного множества

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k, \quad P_i \cap P_k = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq k,$$

(где P_k – блоки) равенством

$$\mu A = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

Покажем, что это определение корректно, то есть что мера μA не зависит от способа представления A в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Определим теперь меру μA блочного множества

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k, \quad P_i \cap P_k = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq k,$$

(где P_k – блоки) равенством

$$\mu A = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

Покажем, что это определение корректно, то есть что мера μA не зависит от способа представления A в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.
Пусть $A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j$,

$$P_i \cap P_k = \varnothing \text{ при } i \neq k, \quad Q_j \cap Q_\ell = \varnothing \text{ при } j \neq \ell,$$

где P_k и Q_j – блоки. Так как пересечение двух блоков является блоком, то в силу аддитивности меры для блоков

$$\sum_k \mu P_k = \sum_{k,j} \mu(P_k \cap Q_j) = \sum_j \mu Q_j.$$

Пример

Пусть A – блочное множество. Докажите, что множества A и $\overline{A}$ являются блочными множествами и что

$$\mu(Int\ A) = \mu\overline{A} = \mu A.$$

Пример

Пусть A – блочное множество. Докажите, что множества A и $\overline{A}$ являются блочными множествами и что

$$\mu(Int\ A) = \mu\overline{A} = \mu A.$$

Лемма

Пусть A, B – блочные множества. Тогда

1. (неотрицательность и монотонность меры)
$$0 \leqslant \mu A \leqslant \mu B, \quad \text{если } A \subset B;$$
2. (полуаддитивность меры)
$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu A + \mu B;$$
3. (аддитивность меры)
$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B, \quad \text{если} \quad A \cap B = \varnothing.$$
$$\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B, \quad \text{если} \quad B \subset A.$$

Пример

Пусть A – блочное множество. Докажите, что множества A и $\overline{A}$ являются блочными множествами и что

$$\mu(Int\ A) = \mu\overline{A} = \mu A.$$

Лемма

Пусть A, B – блочные множества. Тогда

1. (неотрицательность и монотонность меры)

$$0 \leqslant \mu A \leqslant \mu B, \quad \text{если } A \subset B;$$

2. (полуаддитивность меры)

$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu A + \mu B;$$

3. (аддитивность меры)

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B, \quad \text{если} \quad A \cap B = \varnothing.$$

$$\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B, \quad \text{если} \quad B \subset A.$$

Определение

Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ ограничено. Числа

$$\mu_* E = \sup_{A \subset E} \mu A, \quad \mu^* E = \inf_{B \supset E} \mu B,$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем блочным множествам A, B, называются соответственно *внутренней* и *внешней мерой Жордана* множества E.

Определение

Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ ограничено. Числа

$$\mu_* E = \sup_{A \subset E} \mu A, \quad \mu^* E = \inf_{B \supset E} \mu B,$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем блочным множествам A, B, называются соответственно *внутренней* и *внешней мерой Жордана* множества E.

Определение

Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если $\mu_* E = \mu^* E$, то есть если его внутреняя и внешняя меры совпадают. Общее значение этих мер называется *мерой Жордана* множества E и обозначается μE.

Очевидно, что любое блочное множество измеримо по Жордану и его мера Жордана совпадает с мерой этого множества как блочного.

Очевидно, что любое блочное множество измеримо по Жордану и его мера Жордана совпадает с мерой этого множества как блочного.

Упражнение

Пусть E – измеримое множество. Покажите, что $\mu E > 0$ тогда и только тогда, когда E имеет внутренние точки.

Очевидно, что любое блочное множество измеримо по Жордану и его мера Жордана совпадает с мерой этого множества как блочного.

Упражнение

Пусть E – измеримое множество. Покажите, что $\mu E > 0$ тогда и только тогда, когда E имеет внутренние точки.

Упражнение

Всякое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру, равную нулю.

Очевидно, что любое блочное множество измеримо по Жордану и его мера Жордана совпадает с мерой этого множества как блочного.

Упражнение

Пусть E – измеримое множество. Покажите, что $\mu E > 0$ тогда и только тогда, когда E имеет внутренние точки.

Упражнение

Всякое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру, равную нулю.

Упражнение

Множество в $\mathbb{R}$, состоящее из конечного числа точек, измеримо, и его мера равна нулю.

Упражнение

Множество $E \subset \mathbb{R}$ рациональных точек отрезка $[0; 1]$ неизмеримо.

Упражнение

Множество $E \subset \mathbb{R}$ рациональных точек отрезка $[0; 1]$ неизмеримо.

Упражнение

Приведите пример ограниченной неизмеримой области.

Упражнение

Множество $E \subset \mathbb{R}$ рациональных точек отрезка $[0; 1]$ неизмеримо.

Упражнение

Приведите пример ограниченной неизмеримой области.

Упражнение

Доказать, что для измеримости множества $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали два таких измеримых множества F_ε, G_ε, что $F_\varepsilon \subset E \subset G_\varepsilon$, $\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.