Математический анализ. Лекция III

Предел последовательности

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

10 сентября 2013 г.

Определение

Пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a_n \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что задана *последовательность*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

которая обозначается $\{a_n\}$. Пара (n, a_n) называется *n-м элементом* последовательности, а число a_n – *значением* этого элемента.

Определение

Пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a_n \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что задана *последовательность*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

которая обозначается $\{a_n\}$. Пара (n, a_n) называется *n-м элементом* последовательности, а число a_n – *значением* этого элемента.

Замечание

Всякая последовательность имеет счетное множество элементов. Множество значений элементов последовательности может быть конечным или счетным. Например, множество значений элементов последовательности

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

состоит из двух элементов: 0 и 1.

Определение

Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \ \rightarrow \ |a - a_n| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

или

$$a_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Можно обобщить понятие предела числовой последовательности, рассматривая в качестве предела не только число, но и какой-либо из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Можно обобщить понятие предела числовой последовательности, рассматривая в качестве предела не только число, но и какой-либо из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞.
Рассмотрим множества $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ и $\hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$.

Определение

При $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью числа a* называется $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; *$\varepsilon$-окрестностью элементов* $+\infty$, $-\infty$, ∞ называются множества

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right); \qquad U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right);$$

$$U_\varepsilon(\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right).$$

Через $U(a)$ при $a \in \hat{\mathbb{R}}$ обозначается произвольная ε-окрестность элемента a.

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \ \to \ a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \to \ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \ \to \ a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Это же определение можно перефразировать следующим образом.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если в любой его окрестности $U(a)$ содержатся значения всех (за исключением быть может, конечного числа) элементы последовательности.

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\to\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \;\forall\, n \geqslant n_\varepsilon \;\to\; a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Это же определение можно перефразировать следующим образом.

Определение

Элемент $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если в любой его окрестности $U(a)$ содержатся значения всех (за исключением быть может, конечного числа) элементы последовательности.

Везде далее, если какое-то свойство выполняется для всех членов последовательности, кроме конечного их числа, будем говорить, что это свойство выполняется для *почти всех* членов последовательности.

Определение

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет числовой предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Определение

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет числовой предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Определение

Последовательность называется *сходящейся в* $\overline{\mathbb{R}}$ (*или в* $\hat{\mathbb{R}}$), если она имеет предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$ (или $\hat{\mathbb{R}}$).

Определение

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет числовой предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Определение

Последовательность называется *сходящейся в* $\overline{\mathbb{R}}$ (*или в* $\hat{\mathbb{R}}$), если она имеет предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$ (или $\hat{\mathbb{R}}$).

Упражнение

Докажите, что число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \ \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \ \to \ \exists\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 : \ |a_n - a| \geqslant \varepsilon_0.$$

Определение

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет числовой предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Определение

Последовательность называется *сходящейся в* $\overline{\mathbb{R}}$ (*или в* $\hat{\mathbb{R}}$), если она имеет предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$ (или $\hat{\mathbb{R}}$).

Упражнение

Докажите, что число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 : \ |a_n - a| \geqslant \varepsilon_0.$$

Упражнение

Являются ли следующие последовательности сходящимися в $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\hat{\mathbb{R}}$:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}; \quad \{(-1)^n\}; \quad \{n\}; \quad \{(-1)^n n\}.$$

Упражнение

Пусть $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq a'$. Тогда сущесвует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \varnothing$.

Упражнение

Пусть $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq a'$. Тогда сущесвует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \varnothing$.

Теорема единственности

Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.

Упражнение

Пусть $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq a'$. Тогда сущесвует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \varnothing$.

Теорема единственности

Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.

Доказательство. Допустим, что для данной последовательности $\{a_n\}$ каждый из двух различных элементов $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \varnothing$. Тогда по определению предела

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \ \rightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(a);$$

$$\exists\, n'_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n'_\varepsilon \ \rightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(a').$$

Упражнение

Пусть $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \neq a'$. Тогда сущесвует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \varnothing$.

Теорема единственности

Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.

Доказательство. Допустим, что для данной последовательности $\{a_n\}$ каждый из двух различных элементов $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \varnothing$. Тогда по определению предела

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \ \to\ a_n \in U_\varepsilon(a);$$

$$\exists\, n'_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall\, n \geqslant n'_\varepsilon \ \to\ a_n \in U_\varepsilon(a').$$

Пусть $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, тогда

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon \ \to\ a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset,$$

а это невозможно. Теорема доказана.

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если множество значений ее элементов ограничено.
Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если множество значений ее элементов ограничено сверху.
Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если множество значений ее элементов ограничено снизу.

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists\, M \in \mathbb{R}:\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow\ |a_n| \leqslant M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists\, M \in \mathbb{R}:\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow\ a_n \leqslant M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если

$$\exists\, m \in \mathbb{R}:\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow\ a_n \geqslant m.$$

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ |a_n| \leqslant M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ a_n \leqslant M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если

$$\exists\, m \in \mathbb{R}: \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ a_n \geqslant m.$$

Очевидно, что данные определения равносильны.

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если

$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \to \ |a_n| \leqslant M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если

$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \to \ a_n \leqslant M.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если

$$\exists\, m \in \mathbb{R}: \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \to \ a_n \geqslant m.$$

Очевидно, что данные определения равносильны.

Упражнение

Последовательность ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена сверху и ограничена снизу.

Теорема

Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Тогда для $\varepsilon = 1$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \geqslant n_1 \ \to\ |a - a_n| < 1.$$

Поэтому

$$\forall\, n \geqslant n_1 \ \to\ a - 1 < a_n < a + 1.$$

Теорема

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Тогда для $\varepsilon = 1$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_1 \ \to \ |a - a_n| < 1.$$

Поэтому

$$\forall\, n \geqslant n_1 \ \to \ a - 1 < a_n < a + 1.$$

Пусть

$$m = \min\{a - 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}\};$$

$$M = \max\{a + 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}\}.$$

Очевидно, что $\{a_n\}$ ограничена снизу числом m, и сверху числом M.
Аналогично показывается, что $\{a_n\}$ ограничена снизу. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена в силу ее ограниченности сверху и снизу. Теорема доказана.

Теорема

Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Тогда для $\varepsilon = 1$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_1 \ \to \ |a - a_n| < 1.$$

Поэтому

$$\forall\, n \geqslant n_1 \ \to \ a - 1 < a_n < a + 1.$$

Пусть

$$m = \min\{a - 1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1 - 1}\};$$

$$M = \max\{a + 1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1 - 1}\}.$$

Очевидно, что $\{a_n\}$ ограничена снизу числом m, и сверху числом M. Аналогично показывается, что $\{a_n\}$ ограничена снизу. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена в силу ее ограниченности сверху и снизу. Теорема доказана.

Замечание

Не всякая ограниченная последовательность сходится. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограниченная и расходящаяся.

Теорема

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ – последовательность. Тогда

1. если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < b$, то

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_0 \ \rightarrow \ a_n < b;$$

Теорема

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ – последовательность. Тогда

1. если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < b$, то
$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_0 \ \to \ a_n < b;$$
2. если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\forall\, n \in \mathbb{N} \ \to \ a_n \leqslant b$, то $a \leqslant b$.

Теорема

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ – последовательность. Тогда

1. если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < b$, то

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \;\; \forall\, n \geqslant n_0 \;\; \rightarrow \;\; a_n < b;$$

2. если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \rightarrow \;\; a_n \leqslant b$, то $a \leqslant b$.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon = b - a > 0$, тогда

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \;\; \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \;\; \rightarrow \;\; a_n \in U_\varepsilon(a).$$

Значит, $a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Следовательно, $a_n < a + \varepsilon = b$.

Теорема

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ – последовательность. Тогда

1. если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < b$, то
$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_0 \ \rightarrow \ a_n < b;$$
2. если существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ a_n \leqslant b$, то $a \leqslant b$.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon = b - a > 0$, тогда
$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \ \rightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(a).$$
Значит, $a_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Следовательно, $a_n < a + \varepsilon = b$.
2. Допустим, что $a > b$, то, аналогично предыдущему пункту, получаем
$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geqslant n_0 \ \rightarrow \ a_n > b.$$
Что противоречит утверждению теоремы.

Теорема о двух милиционерах

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ – последовательности такие, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Тогда существует $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Теорема о двух милиционерах

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ – последовательности такие, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Тогда существует $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Доказательство. Из определения предела, для любого $\varepsilon > 0$

$$\exists\, n_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}: \;\forall\, n \geqslant n_\varepsilon^{(1)} \;\to\; a_n \in U_\varepsilon(a).$$

$$\exists\, n_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}: \;\forall\, n \geqslant n_\varepsilon^{(2)} \;\to\; c_n \in U_\varepsilon(a).$$

Теорема о двух милиционерах

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ – последовательности такие, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Тогда существует $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Доказательство. Из определения предела, для любого $\varepsilon > 0$

$$\exists\, n_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}: \;\forall\, n \geqslant n_\varepsilon^{(1)} \;\to\; a_n \in U_\varepsilon(a).$$

$$\exists\, n_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}: \;\forall\, n \geqslant n_\varepsilon^{(2)} \;\to\; c_n \in U_\varepsilon(a).$$

Пусть $n = \max\{n_\varepsilon^{(1)}; n_\varepsilon^{(2)}\}$. Тогда

$$\forall\, n \geqslant n_\varepsilon \;\to\; b_n \in [a_n; c_n] \subset U_\varepsilon(a).$$

Теорема доказана.