Математический анализ. Лекция XXIII

Пространство $\mathbb{R}^n$

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

7 февраля 2014 г.

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.
Функцию ρ называют метрикой пространства M.

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.
Функцию ρ называют метрикой пространства M.
Элементы метрического пространства называют также *точками*.

Определение

Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* между элементами x и y и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.
Функцию ρ называют метрикой пространства M.
Элементы метрического пространства называют также *точками*.
С помощью расстояния можно ввести понятия сходящейся последовательности точек метрического пространства, ε-окрестности точки, открытого и замкнутого множества, замыкания множества и другие. Мы познакомимся с этими понятиями на примере пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством* $\mathbb{R}^n$ называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством* $\mathbb{R}^n$ называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Элемент пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *точкой*, а числа $x_1, \ldots, x_n$ – *координатами* точки x.

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством* $\mathbb{R}^n$ называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Элемент пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *точкой*, а числа $x_1, \ldots, x_n$ – *координатами* точки x.

Аксиомы 1, 2 расстояния в $\mathbb{R}^n$ очевидны.

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством* $\mathbb{R}^n$ называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием
$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Элемент пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *точкой*, а числа $x_1, \ldots, x_n$ – *координатами* точки x.

Аксиомы 1, 2 расстояния в $\mathbb{R}^n$ очевидны.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести операции сложения $x + y$ и умножения λx на число $\lambda \in \mathbb{R}$, следующим образом: при $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Тогда $\mathbb{R}^n$ становится не просто метрическим, а линейным пространством, а точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют также *вектором*.

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Пространством* $\mathbb{R}^n$ называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Элемент пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *точкой*, а числа $x_1, \ldots, x_n$ – *координатами* точки x.
Аксиомы 1, 2 расстояния в $\mathbb{R}^n$ очевидны.
В $\mathbb{R}^n$ можно ввести операции сложения $x + y$ и умножения λx на число $\lambda \in \mathbb{R}$, следующим образом: при $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Тогда $\mathbb{R}^n$ становится не просто метрическим, а линейным пространством, а точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют также *вектором*.
По определению $x - y = x + (-1)y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$

Введем понятие *модуля вектора* $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

Введем понятие *модуля вектора* $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лемма (неравенство Коши–Буняковского)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \to \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant |x|\,|y|.$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим лишь нетривиальный случай, когда $|x| > 0$, $|y| > 0$. При $a, b \geqslant 0$ имеем

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0, \quad ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Введем понятие *модуля вектора* $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лемма (неравенство Коши–Буняковского)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \to \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant |x|\,|y|.$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим лишь нетривиальный случай, когда $|x| > 0$, $|y| > 0$. При $a, b \geqslant 0$ имеем

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0, \quad ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Заменив a на $a\sqrt{t}$, b – на $\dfrac{b}{\sqrt{t}}$ при произвольном $t > 0$, имеем

$$ab \leqslant \frac{a^2 t}{2} + \frac{b^2}{2t}.$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall\, t > 0.$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall\, t > 0.$$

Взяв $t = \dfrac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall\, t > 0.$$

Взяв $t = \dfrac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма (неравенство Минковского)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \;\to\; |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall\, t > 0.$$

Взяв $t = \dfrac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма (неравенство Минковского)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ \rightarrow \ |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Доказательство.

$$|x + y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + |y|^2.$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall\, t > 0.$$

Взяв $t = \dfrac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма (неравенство Минковского)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ \rightarrow \ |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Доказательство.

$$|x+y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + |y|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем отсюда, что

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall\, t > 0.$$

Взяв $t = \dfrac{|y|}{|x|}$, получаем требуемое неравенство.

Лемма (неравенство Минковского)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \ \to \ |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Доказательство.

$$|x + y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + |y|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем отсюда, что

$$|x + y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

откуда и следует утверждение леммы.
Это неравенство также называют *неравенством треугольника*.

Проверим аксиому 3 расстояния.
Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x' = x - y$, $y' = y - z$. Тогда $x' + y' = x - z$. В силу неравенства Минковского

$$|x' + y'| \leqslant |x'| + |y'|, \text{ то есть } |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|,$$

Проверим аксиому 3 расстояния.
Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x' = x - y$, $y' = y - z$. Тогда $x' + y' = x - z$. В силу неравенства Минковского

$$|x' + y'| \leqslant |x'| + |y'|, \text{ то есть } |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|,$$

что лишь обозначением отличается от неравенства

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Понятие расстояния в $\mathbb{R}^n$ дает возможность ввести понятия ε-окрестности точки и предельного перехода в $\mathbb{R}^n$.

Понятие расстояния в $\mathbb{R}^n$ дает возможность ввести понятия ε-окрестности точки и предельного перехода в $\mathbb{R}^n$.

Определение

При $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - a| < \varepsilon\}.$$

$U_\varepsilon(a)$ называют еще *шаром*, или *открытым шаром* в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке a.

Понятие расстояния в $\mathbb{R}^n$ дает возможность ввести понятия ε-окрестности точки и предельного перехода в $\mathbb{R}^n$.

Определение

При $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - a| < \varepsilon\}.$$

$U_\varepsilon(a)$ называют еще *шаром*, или *открытым шаром* в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке a.

Определение

Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют *пределом последовательности* $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ *точек* $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ и пишут $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$ или $x^{(m)} \to a$ при $m \to \infty$, если

$$\lim_{m\to\infty} |x^{(m)} - a| = 0,$$

или, иначе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall\, m \geqslant m_\varepsilon \ \to \ |x^{(m)} - a| < \varepsilon.$$

Теорема

Последовательность $\{x^{(m)}\}_1^\infty$ точек из $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $a = \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда при каждом $k = 1, \ldots, n$

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = a_k,$$

где $x_k^{(m)}$ и a_k – координаты точек $x^{(m)}$ и a соответственно.

Теорема

Последовательность $\{x^{(m)}\}_1^\infty$ точек из $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $a = \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда при каждом $k = 1, \ldots, n$

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = a_k,$$

где $x_k^{(m)}$ и a_k – координаты точек $x^{(m)}$ и a соответственно.

Доказательство очевидно, если воспользоваться неравенством

$$|x_k^{(m)} - a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - a_i)^2} = |x^{(m)} - a|.$$

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если $\exists\, R > 0$: $E \subset U_R(\vec{0})$.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если $\exists\, R > 0$: $E \subset U_R(\vec{0})$.

Определение

Последовательность $\{x^{(m)}\}$ называется *ограниченной*, если множество ее значений ограничено, то есть

$$\exists\, R > 0 : \ \forall\, m \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ |x^{(m)}| < R.$$

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x^{(m)}\}$ – ограниченная последовательность. Тогда при любом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, числовая последовательность $\{x_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена. Рассмотрим числовую последовательность $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует такая подпоследовательность $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности натуральных чисел, что последовательность $\left\{x_1^{(m_j^{(1)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Теорема Больцано–Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x^{(m)}\}$ – ограниченная последовательность. Тогда при любом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, числовая последовательность $\{x_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена.
Рассмотрим числовую последовательность $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует такая подпоследовательность $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности натуральных чисел, что последовательность $\left\{x_1^{(m_j^{(1)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Рассмотрим последовательность $\left\{x_2^{(m_j^{(1)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{m_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что последовательность $\left\{x_2^{(m_j^{(2)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Продолжая это рассуждение, получим n последовательностей натуральных чисел $\{m_j^{(1)}\}$, $\{m_j^{(2)}\}$, ..., $\{m_j^{(n)}\}$, причем каждая следующая является подпоследовательностью предшествующей, и последовательности $\left\{x_k^{(m_j^{(k)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходятся при $k = 1, \ldots, n$.

Продолжая это рассуждение, получим n последовательностей натуральных чисел $\{m_j^{(1)}\}$, $\{m_j^{(2)}\}$, $\ldots$, $\{m_j^{(n)}\}$, причем каждая следующая является подпоследовательностью предшествующей, и последовательности $\left\{x_k^{(m_j^{(k)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходятся при $k = 1, \ldots, n$.

Но тогда сходятся и последовательности $\left\{x_k^{(m_j^{(n)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 1, \ldots, n$, как подпоследовательности сходящихся последовательностей. Следовательно, последовательность $\left\{x^{(m_j^{(n)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится, что и требовалось показать.

Открытые и замкнутые множества

Определение

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \;\; U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Открытые и замкнутые множества

Определение

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \; U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Открытые и замкнутые множества

Определение

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Упражнение

Докажите, что

1. пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством;
2. объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством.

Лемма

ε-окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Лемма

ε-окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Требуется доказать, что всякая точка из $U_\varepsilon(a)$ является внутренней. Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Тогда $r = |x - a| < \varepsilon$ и $\delta = \varepsilon - r > 0$. Достаточно показать, что $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$, то есть что всякая точка y из $U_\delta(x)$ принадлежит $U_\varepsilon(a)$.

Лемма

ε-окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Требуется доказать, что всякая точка из $U_\varepsilon(a)$ является внутренней. Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Тогда $r = |x - a| < \varepsilon$ и $\delta = \varepsilon - r > 0$.
Достаточно показать, что $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$, то есть что всякая точка y из $U_\delta(x)$ принадлежит $U_\varepsilon(a)$.
Пусть $y \in U_\delta(x)$, то есть $|y - x| < \delta$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$|y - a| \leqslant |y - x| + |x - a| < \delta + r = \varepsilon,$$

то есть $y \in U_\varepsilon(a)$, что и требовалось показать.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

В силу предыдущей леммы ε-окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

В силу предыдущей леммы ε-окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Упражнение

Сформулируйте определение предела $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$ последовательности, используя окрестности $U(a)$ вместо ε-окрестностей $U_\varepsilon(a)$.

Определение

Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

В силу предыдущей леммы ε-окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

Упражнение

Сформулируйте определение предела $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$ последовательности, используя окрестности $U(a)$ вместо ε-окрестностей $U_\varepsilon(a)$.

В дальнейшем будут использоваться обозначения проколотых окрестностей:

$$\mathring{U}_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}, \quad \mathring{U}(x) = U(x) \setminus \{x\}.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty : \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a \neq x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty : \ \forall m \in \mathbb{N} \ \to \ a \neq x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \to \ E \cap \mathring{U}_\varepsilon(a) \neq \varnothing.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty : \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a \neq x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m \to \infty} x^{(m)} = a.$$

Определение

Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow E \cap \mathring{U}_\varepsilon(a) \neq \varnothing.$$

Упражнение

Докажите эквивалентность этих определений.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение

Докажите, что

1. объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
2. пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение

Докажите, что

1. объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
2. пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество

$$\overline{E} = E \cup \{x : \ x \in \mathbb{R}^n, x \text{ – предельная точка множества } E\}$$

называется *замыканием множества* E.

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение

Докажите, что

1. объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
2. пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество

$$\overline{E} = E \cup \{x : \ x \in \mathbb{R}^n, x \text{ – предельная точка множества } E\}$$

называется *замыканием множества* E.

Упражнение

Множестово E замкнуто тогда и только тогда, когда $E = \overline{E}$.

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a – предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$.

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a – предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\}: \; a \neq y^{(m)} \in \overline{E}, \quad \varepsilon_m = |y^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Покажем, что a – предельная точка множества E и, следовательно, $a \in \overline{E}$.

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a – предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\}: \ a \neq y^{(m)} \in \overline{E}, \quad \varepsilon_m = |y^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Покажем, что a – предельная точка множества E и, следовательно, $a \in \overline{E}$. Для этого построим последовательность

$$\{x^{(m)}\}: \ a \neq x^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Лемма

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a – предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\}: \ a \neq y^{(m)} \in \overline{E}, \quad \varepsilon_m = |y^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Покажем, что a – предельная точка множества E и, следовательно, $a \in \overline{E}$. Для этого построим последовательность

$$\{x^{(m)}\}: \ a \neq x^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Если $y^{(m)} \in E$, то положим $x^{(m)} = y^{(m)}$. Если $y^{(m)} \notin E$, то $y^{(m)}$ – предельная точка множества E (поскольку $y^{(m)} \in \overline{E}$). В этом случае через $x^{(m)}$ обозначим такую точку множества E, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \dfrac{\varepsilon_m}{2}$.

Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$0 < \frac{\varepsilon_m}{2} \leqslant |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leqslant |x^{(m)} - a| \leqslant$$

$$\leqslant |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m.$$

Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$0 < \frac{\varepsilon_m}{2} \leqslant |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leqslant |x^{(m)} - a| \leqslant$$

$$\leqslant |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m.$$

Отсюда видно, что a – предельная точка множества E, что и требовалось показать.

Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$0 < \frac{\varepsilon_m}{2} \leqslant |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leqslant |x^{(m)} - a| \leqslant$$

$$\leqslant |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\varepsilon_m.$$

Отсюда видно, что a – предельная точка множества E, что и требовалось показать.

Доказанную лемму можно сформулировать в виде:

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}.$$