Математический анализ. Лекция XX

Кривые в трехмерном пространстве

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

19 ноября 2013 г.

Определение

Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ с конкретным его описанием:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) : \ a \leqslant t \leqslant b\},$$

где x, y, z – непрерывные функции на $[a; b]$, называется *кривой*.

Определение

Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ с конкретным его описанием:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) : \ a \leqslant t \leqslant b\},$$

где x, y, z – непрерывные функции на $[a; b]$, называется *кривой*.

Кривая определяется не только положением множества точек в пространстве $\mathbb{R}^3$, но и способом его описания.

Кривые в трехмерном пространстве

Определение

Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ с конкретным его описанием:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) : \ a \leqslant t \leqslant b\},$$

где x, y, z – непрерывные функции на $[a; b]$, называется *кривой*.

Кривая определяется не только положением множества точек в пространстве $\mathbb{R}^3$, но и способом его описания.

Точкой кривой Γ называют пару $\{t, \vec{r}(t)\}$, где $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Кривые в трехмерном пространстве

Определение

Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ с конкретным его описанием:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) : \ a \leqslant t \leqslant b\},$$

где x, y, z – непрерывные функции на $[a; b]$, называется *кривой*.

Кривая определяется не только положением множества точек в пространстве $\mathbb{R}^3$, но и способом его описания.

Точкой кривой Γ называют пару $\{t, \vec{r}(t)\}$, где $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Точка $M \in \mathbb{R}^3$ называется *кратной точкой* кривой Γ, если $\exists\, t_1, t_2 \in [a; b]$, $t_1 \neq t_2$: $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = M$.

Определение

Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ с конкретным его описанием:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) : \ a \leqslant t \leqslant b\},$$

где x, y, z – непрерывные функции на $[a; b]$, называется *кривой*.

Кривая определяется не только положением множества точек в пространстве $\mathbb{R}^3$, но и способом его описания.

Точкой кривой Γ называют пару $\{t, \vec{r}(t)\}$, где $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Точка $M \in \mathbb{R}^3$ называется *кратной точкой* кривой Γ, если $\exists\, t_1, t_2 \in [a; b]$, $t_1 \neq t_2$: $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = M$.

Кривая без кратных точек называется *простой кривой*.

Возрастание параметра t определяет некоторое направление движения точки $\vec{r}(t)$ по кривой (некоторый порядок прохождения точек кривой). Поэтому говорят, что *на кривой* Γ *задана ориентация*, рассматриваемую кривую называют *ориентированной кривой*, точку $\vec{r}(a)$ – *началом кривой*, а точку $\vec{r}(b)$ – *концом кривой*.

Возрастание параметра t определяет некоторое направление движения точки $\vec{r}(t)$ по кривой (некоторый порядок прохождения точек кривой). Поэтому говорят, что *на кривой* Γ *задана ориентация*, рассматриваемую кривую называют *ориентированной кривой*, точку $\vec{r}(a)$ – *началом кривой*, а точку $\vec{r}(b)$ – *концом кривой*.

Кривая Γ называется *замкнутой кривой*, или *контуром*, если $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Возрастание параметра t определяет некоторое направление движения точки $\vec{r}(t)$ по кривой (некоторый порядок прохождения точек кривой). Поэтому говорят, что *на кривой* Γ *задана ориентация*, рассматриваемую кривую называют *ориентированной кривой*, точку $\vec{r}(a)$ – *началом кривой*, а точку $\vec{r}(b)$ – *концом кривой*.

Кривая Γ называется *замкнутой кривой*, или *контуром*, если $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. Контур называется *простым контуром*, если из $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$, $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ следует $t_1 = a$, $t_2 = b$.

Введем понятие касательной к кривой Г. Пусть t_0, $t_0 + \Delta t \in [a; b]$. Проведем секущую через точки $\vec{r}(t_0)$, $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$, и пусть $\vec{\ell}(\Delta t)$ – единичный вектор секущей, так что $\vec{\ell}(\Delta t) = \operatorname{sign} \Delta t \cdot \dfrac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|}$, где $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ (предполагаем, что $|\Delta \vec{r}| > 0$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$).

Введем понятие касательной к кривой Γ. Пусть t_0, $t_0 + \Delta t \in [a; b]$. Проведем секущую через точки $\vec{r}(t_0)$, $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$, и пусть $\vec{\ell}(\Delta t)$ – единичный вектор секущей, так что $\vec{\ell}(\Delta t) = \operatorname{sign} \Delta t \cdot \dfrac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|}$, где $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ (предполагаем, что $|\Delta \vec{r}| > 0$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$).

Определение

Пусть существует $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \vec{\ell}(\Delta t) = \vec{t}$. Тогда прямая

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{t}\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

называется *касательной к кривой* Γ в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$.

Лемма

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $t_0 \in (a;b)$ и $\exists\, \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. Тогда Γ имеет касательную в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$ и вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ коллинеарен касательной.

Лемма

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $t_0 \in (a;b)$ и $\exists\, \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. Тогда Γ имеет касательную в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$ и вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ коллинеарен касательной.

Доказательство. Из того, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, следует, что $\Delta \vec{r} \neq \vec{0}$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$ и что $\left|\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| \to |\vec{r}\,'(t_0)|$ при $\Delta t \to 0$.

Лемма

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $t_0 \in (a; b)$ и $\exists\, \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. Тогда Γ имеет касательную в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$ и вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ коллинеарен касательной.

Доказательство. Из того, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, следует, что $\Delta \vec{r} \neq \vec{0}$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$ и что $\left|\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| \to |\vec{r}\,'(t_0)|$ при $\Delta t \to 0$. Тогда при $\Delta t \to 0$

$$\vec{\ell}(\Delta t) = \operatorname{sign} \Delta t \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}{\left|\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right|} \to \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|} = \vec{t}.$$

Лемма

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $t_0 \in (a; b)$ и $\exists\, \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. Тогда Γ имеет касательную в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$ и вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ коллинеарен касательной.

Доказательство. Из того, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, следует, что $\Delta \vec{r} \neq \vec{0}$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$ и что $\left|\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| \to |\vec{r}\,'(t_0)|$ при $\Delta t \to 0$. Тогда при $\Delta t \to 0$

$$\vec{\ell}(\Delta t) = \operatorname{sign} \Delta t \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}{\left|\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right|} \to \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|} = \vec{t}.$$

Следовательно, касательная в точке $(t_0, \vec{r}(t_0))$ существует, а ее уравнение можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

Вектор $\vec{t}$ называется *единичным вектором касательной* к кривой Γ.

Вектор $\vec{t}$ называется *единичным вектором касательной* к кривой Г.

Если $t_0 = a$ или $t_0 = b$ и в t_0 существует отличная от $\vec{0}$ односторонняя производная вектора $\vec{r}$, то существует и односторонняя касательная (которая определяется по аналогии с касательной).

Вектор $\vec{t}$ называется *единичным вектором касательной* к кривой Г.

Если $t_0 = a$ или $t_0 = b$ и в t_0 существует отличная от $\vec{0}$ односторонняя производная вектора $\vec{r}$, то существует и односторонняя касательная (которая определяется по аналогии с касательной).

Определение

Кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t) : \; a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *дифференцируемой*, если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на $[a; b]$.

Вектор $\vec{t}$ называется *единичным вектором касательной* к кривой Г.

Если $t_0 = a$ или $t_0 = b$ и в t_0 существует отличная от $\vec{0}$ односторонняя производная вектора $\vec{r}$, то существует и односторонняя касательная (которая определяется по аналогии с касательной).

Определение

Кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t): \ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *дифференцируемой*, если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на $[a; b]$.

Определение

Точка $(t_0, \vec{r}(t_0))$ дифференцируемой кривой Г называется *неособой* точкой, если $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, и называется *особой* точкой в противном случае.

Вектор $\vec{t}$ называется *единичным вектором касательной* к кривой Г.

Если $t_0 = a$ или $t_0 = b$ и в t_0 существует отличная от $\vec{0}$ односторонняя производная вектора $\vec{r}$, то существует и односторонняя касательная (которая определяется по аналогии с касательной).

Определение

Кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t): \ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *дифференцируемой*, если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема на $[a; b]$.

Определение

Точка $(t_0, \vec{r}(t_0))$ дифференцируемой кривой Г называется *неособой* точкой, если $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, и называется *особой* точкой в противном случае.

В последней лемме показано, что дифференцируемая кривая в каждой неособой точке имеет касательную.

Определение

Кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t): \ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a; b]$.

Определение

Кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t) : \ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерыно дифференцируема на $[a; b]$.

Определение

Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется *гладкой кривой*.

Определение

Кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t): \; a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *непрерыно дифференцируемой*, если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерыно дифференцируема на $[a; b]$.

Определение

Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется *гладкой кривой*.

Определение

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t) \colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $a \leqslant c < d \leqslant b$. Тогда кривая

$$\Gamma' = \{\vec{r}(t): \; c \leqslant t \leqslant d\}$$

называется *дугой кривой* Γ.

Определение

Кривая Γ называется *кусочно непрерывно дифференцируемой*, если ее можно разбить на несколько непрерывно дифференцируемых дуг.

Определение

Кривая Γ называется *кусочно непрерывно дифференцируемой*, если ее можно разбить на несколько непрерывно дифференцируемых дуг.

Определение

Кривая Γ называется *кусочно гладкой*, если ее можно разбить на несколько гладких дуг.

Рассмотрим вопрос о замене параметра на кривой. Пусть

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : \ a \leqslant t \leqslant b\}, \quad t = g(\tau), \quad \vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(g(\tau)),$$

$$\tilde{\Gamma} = \{\vec{\rho}(\tau) : \ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Будем считать кривую $\tilde{\Gamma}$ той же, что и Γ, но иначе параметризованной, если замена параметра $t = g(\tau)$ является *допустимой*.
При этом под допустимой заменой параметра понимается такая, при которой
1°. Функция g: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a; b]$ непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим вопрос о замене параметра на кривой. Пусть

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : \ a \leqslant t \leqslant b\}, \quad t = g(\tau), \quad \vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(g(\tau)),$$

$$\tilde{\Gamma} = \{\vec{\rho}(\tau) : \ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Будем считать кривую $\tilde{\Gamma}$ той же, что и Γ, но иначе параметризованной, если замена параметра $t = g(\tau)$ является *допустимой*.

При этом под допустимой заменой параметра понимается такая, при которой

1°. Функция g: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a; b]$ непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

$1'^\circ$. Функция g: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a; b]$ непрерывна и строго возрастает на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим вопрос о замене параметра на кривой. Пусть

$$\Gamma = \{\vec{r}(t): \ a \leqslant t \leqslant b\}, \quad t = g(\tau), \quad \vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(g(\tau)),$$

$$\tilde{\Gamma} = \{\vec{\rho}(\tau): \ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Будем считать кривую $\tilde{\Gamma}$ той же, что и Γ, но иначе параметризованной, если замена параметра $t = g(\tau)$ является *допустимой*.

При этом под допустимой заменой параметра понимается такая, при которой

1°. Функция g: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a; b]$ непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

$1'^\circ$. Функция g: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a; b]$ непрерывна и строго возрастает на $[\alpha, \beta]$.

2°. Функция g дифференцируема на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим вопрос о замене параметра на кривой. Пусть

$$\Gamma = \{\vec{r}(t):\ a \leqslant t \leqslant b\}, \quad t = g(\tau), \quad \vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(g(\tau)),$$

$$\tilde{\Gamma} = \{\vec{\rho}(\tau):\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Будем считать кривую $\tilde{\Gamma}$ той же, что и Γ, но иначе параметризованной, если замена параметра $t = g(\tau)$ является *допустимой*.

При этом под допустимой заменой параметра понимается такая, при которой

1°. Функция g: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a; b]$ непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

$1'^\circ$. Функция g: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a; b]$ непрерывна и строго возрастает на $[\alpha, \beta]$.

2°. Функция g дифференцируема на $[\alpha, \beta]$.

$2'^\circ$. Функция g непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим вопрос о замене параметра на кривой. Пусть

$$\Gamma = \{\vec{r}(t):\ a \leqslant t \leqslant b\}, \quad t = g(\tau), \quad \vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(g(\tau)),$$

$$\tilde{\Gamma} = \{\vec{\rho}(\tau):\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Будем считать кривую $\tilde{\Gamma}$ той же, что и Γ, но иначе параметризованной, если замена параметра $t = g(\tau)$ является *допустимой*.

При этом под допустимой заменой параметра понимается такая, при которой

1°. Функция g: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a; b]$ непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

$1'^\circ$. Функция g: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a; b]$ непрерывна и строго возрастает на $[\alpha, \beta]$.

2°. Функция g дифференцируема на $[\alpha, \beta]$.

$2'^\circ$. Функция g непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$.

3°. Производная $g'(\tau) \neq 0$ при $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$.

При этом, очевидно, дифференцируемая (непрерывно дифференцируемая) кривая Γ переходит в дифференцируемую (непрерывно дифференцируемую) кривую $\tilde{\Gamma}$.

При этом, очевидно, дифференцируемая (непрерывно дифференцируемая) кривая Γ переходит в дифференцируемую (непрерывно дифференцируемую) кривую $\tilde{\Gamma}$.

При выполнении этих условийобратная к g функция g^{-1} будет, очевидно, удовлетворять тем же условиям. Кривые Γ и $\tilde{\Gamma}$ при этом отождествляют (иначе говоря, их называют одной и той же кривой, различным образом параметризованной).

Упражнение

Показать, что при допустимой замене параметра

1. неособая точка переходит в неособую;
2. касательная в неособой точке сохраняется;
3. гладкая кривая переходит в гладкую кривую.

Упражнение

Показать, что при допустимой замене параметра

1. неособая точка переходит в неособую;
2. касательная в неособой точке сохраняется;
3. гладкая кривая переходит в гладкую кривую.

Упражнение

Показать, что всякую гладкую кривую $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ можно разбить на конечное число гладких дуг $\Gamma_i = \{\vec{r}(t)\colon t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$, где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, так, что на каждой дуге Γ_i в качестве параметра (при допустимой его замене) можно взять либо x, либо y, либо z.

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$. Систему точек $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ называют *разбиением отрезка* $[a; b]$, если $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i_\tau} = b$.
Соединив точки $\vec{r}(t_{i-1})$ и $\vec{r}(t_i)$ отрезками ($i = 1, \ldots, i_\tau$), получим *ломаную, вписанную в кривую* Γ (обозначим ее символом Λ_τ), длина которой

$$S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|.$$

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$. Систему точек $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ называют *разбиением отрезка* $[a; b]$, если $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i_\tau} = b$.
Соединив точки $\vec{r}(t_{i-1})$ и $\vec{r}(t_i)$ отрезками ($i = 1, \ldots, i_\tau$), получим *ломаную, вписанную в кривую* Γ (обозначим ее символом Λ_τ), длина которой

$$S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|.$$

Определение

Длиной кривой Γ называется

$$S_\Gamma = \sup_\tau S_{\Lambda_\tau}.$$

Определение

Кривая Г называется *спрямляемой*, если ее длина конечна (то есть $S_\Gamma < +\infty$).

Определение

Кривая Γ называется *спрямляемой*, если ее длина конечна (то есть $S_\Gamma < +\infty$).

Ясно, что длина кривой и ее спрямляемость не меняются при допустимой замене параметра на кривой.

Определение

Кривая Γ называется *спрямляемой*, если ее длина конечна (то есть $S_\Gamma < +\infty$).

Ясно, что длина кривой и ее спрямляемость не меняются при допустимой замене параметра на кривой.

Упражнение

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t) : \ a \leqslant t \leqslant b\}$ – спрямляемая кривая, $c \in (a; b)$. Докажите, что кривые

$$\Gamma' = \{\vec{r}(t) : \ a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \Gamma'' = \{\vec{r}(t) : \ c \leqslant t \leqslant b\}.$$

спрямляемы и сумма их длин равна длине кривой Γ. Верно и обратное.

Теорема

Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема. Тогда она спрямляема и ее длина удовлетворяет условию

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}\,'(t)|(b - a).$$

Теорема

Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема. Тогда она спрямляема и ее длина удовлетворяет условию

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}'(t)|(b-a).$$

Доказательство. Функция $|\vec{r}'(t)|$ как непрерывная на отрезке $[a; b]$ достигает на нем своего максимума. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=1}^{i_\tau}$ – некоторое разбиение отрезка $[a; b]$. Тогда

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}'(t)| \sum_{i=1}^{i_\tau} (t_i - t_{i-1}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}'(t)|(b-a).$$

Теорема

Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема. Тогда она спрямляема и ее длина удовлетворяет условию

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}\,'(t)|(b-a).$$

Доказательство. Функция $|\vec{r}\,'(t)|$ как непрерывная на отрезке $[a;b]$ достигает на нем своего максимума. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=1}^{i_\tau}$ – некоторое разбиение отрезка $[a;b]$. Тогда

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}\,'(t)| \sum_{i=1}^{i_\tau} (t_i - t_{i-1}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}\,'(t)|(b-a).$$

Переходя в этом неравенстве к верхней грани по τ, получаем утверждение теоремы.

Теорема

Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги $s = s(t)$, отсчитываемая от ее начала $(a, \vec{r}(a))$, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра t, причем

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Теорема

Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги $s = s(t)$, отсчитываемая от ее начала $(a, \vec{r}(a))$, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра t, причем

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Доказательство. Пусть $s = s(t)$ – длина дуги кривой

$$\Gamma_t = \{\vec{r}(u) : \; a \leqslant u \leqslant t\}, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

являющейся дугой кривой Γ. Пусть $a \leqslant t_0 < t_0 + \Delta t \leqslant b$. Применяя предыдущую теорему к дуге $\{\vec{r}(t) : \; t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t\}$ длины $\Delta s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, получаем

$$|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)| \leqslant \Delta s \leqslant \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t} |\vec{r}'(t)| \Delta t.$$

Деля последнее неравенство на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0+0$, получаем, что существует $s'_+(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$.

Деля последнее неравенство на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0+0$, получаем, что существует $s'_+(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$.
Аналогично устанавливается, что существует $s'_-(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$.

Деля последнее неравенство на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0+0$, получаем, что существует $s'_+(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$.
Аналогично устанавливается, что существует $s'_-(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$.
Отсюда следует, что существует $s'(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$. Из неотрицательности $s'(t)$ следует, что $s(t)$ возрастает на $[a; b]$.

Следствие

Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(s)\colon 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$ является длина ее дуги s, то $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$.

Следствие

Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(s) \colon 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$ является длина ее дуги s, то $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$.

Геометрический смысл равенства $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ состоит в том, что предел отношения $\left|\dfrac{\Delta s}{\Delta \vec{r}}\right|$ длины дуги к длине стягивающей ее хорды, когда один из концов дуги фиксирован, а длина дуги стремится к нулю, равен единице.

Следствие

С помощью допустимой замены параметра на гладкой ориентированной кривой можно перейти к параметру s, являющемуся переменной длиной дуги, отсчитываемой от начала кривой.

Следствие

С помощью допустимой замены параметра на гладкой ориентированной кривой можно перейти к параметру s, являющемуся переменной длиной дуги, отсчитываемой от начала кривой.

Запишем равенство $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ в виде

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где α, β, γ – углы, образованные вектором $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ (а значит, и касательной) с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно. Отсюда

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

в чем и состоит геометрический смысл координат вектора $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$.