# Математический анализ. Лекция XIX

## Векторнозначные функции

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

13 ноября 2013 г.

**Определение**

Пусть каждой точке $t \in T \subset \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ трехмерного пространства. Тогда будем говорить, что *на $T$ задана вектор-функция $\vec{r}$*.

# Векторнозначные функции

## Определение

Пусть каждой точке $t \in T \subset \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ трехмерного пространства. Тогда будем говорить, что *на $T$ задана вектор-функция $\vec{r}$*.

Пусть в трехмерном пространстве зафиксирована прямоугольная декартова система координат. Тогда $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты (компоненты) вектора $\vec{r}(t)$. Таким образом, задание на $T$ вектор-функции равносильно заданию на $T$ трех числовых функций.

# Векторнозначные функции

## Определение

Пусть каждой точке $t \in T \subset \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ трехмерного пространства. Тогда будем говорить, что *на $T$ задана вектор-функция* $\vec{r}$.

Пусть в трехмерном пространстве зафиксирована прямоугольная декартова система координат. Тогда $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты (компоненты) вектора $\vec{r}(t)$. Таким образом, задание на $T$ вектор-функции равносильно заданию на $T$ трех числовых функций. Символом $|\vec{r}|$ обозначают длину вектора $\vec{r}$.

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена на некоторой окрестности $\mathring{U}(t_0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называется *пределом вектор-функции* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to t_0$ (пишут $\vec{r}_0 = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$), если $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена на некоторой окрестности $\mathring{U}(t_0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называется *пределом вектор-функции* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to t_0$ (пишут $\vec{r}_0 = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$), если $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.

Определение предела вектор-функции сведено к известному определению предела числовой функции $f(t) = |\vec{r}(t) - \vec{r}_0|$. Написав последнее в ($\varepsilon$-$\delta$)-терминах, приходим к иной форме определения предела вектор-функции.

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена на $\mathring{U}(t_0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называется *пределом* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| < \varepsilon \quad \forall t : \ 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Если $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}.$$

Из этого равенства видно, что существование предела $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ равносильно существованию трех пределов числовых функций

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$

## Теорема

Пусть существуют пределы

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \quad \lim_{t\to t_0} \vec{r}_2(t), \quad \lim_{t\to t_0} f(t),$$

где $f$ – числовая функция. Тогда существуют пределы

1. $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \pm \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$;
2. $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}_1(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t)$;
3. $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)\right)$;
4. $\lim\limits_{t\to t_0} [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)] = \left[\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)\right]$.

## Теорема

Пусть существуют пределы

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \quad \lim_{t\to t_0} \vec{r}_2(t), \quad \lim_{t\to t_0} f(t),$$

где $f$ – числовая функция. Тогда существуют пределы

1. $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \pm \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t);$
2. $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}_1(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t);$
3. $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)\right);$
4. $\lim\limits_{t\to t_0} [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)] = \left[\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)\right].$

Доказательство этих свойств можно вывести из свойств числовых функций, перейдя к соответствующим равенствам для координат векторов.

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ определена на $\mathring{U}(t_0+0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называют ее *пределом справа* в точке $t_0$ и пишут

$$\vec{r}_0 = \lim_{t\to t_0+0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0+0),$$

если $\lim\limits_{t\to t_0+0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0.$

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ определена на $\mathring{U}(t_0+0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называют ее *пределом справа* в точке $t_0$ и пишут

$$\vec{r}_0 = \lim_{t\to t_0+0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0+0),$$

если $\lim\limits_{t\to t_0+0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.

Аналогично определяется *предел слева* $\lim\limits_{t\to t_0-0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0-0)$.

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ определена на $\mathring{U}(t_0+0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называют ее *пределом справа* в точке $t_0$ и пишут

$$\vec{r}_0 = \lim_{t\to t_0+0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0+0),$$

если $\lim\limits_{t\to t_0+0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.
Аналогично определяется *предел слева* $\lim\limits_{t\to t_0-0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0-0)$.

Предыдущая теорема верна и для односторонних пределов.

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ определена на $\mathring{U}(t_0+0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называют ее *пределом справа* в точке $t_0$ и пишут

$$\vec{r}_0 = \lim_{t\to t_0+0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0+0),$$

если $\lim\limits_{t\to t_0+0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.
Аналогично определяется *предел слева* $\lim\limits_{t\to t_0-0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0-0)$.

Предыдущая теорема верна и для односторонних пределов.

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ определена на $U(t_0)$. Она называется *непрерывной в точке* $t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ определена на $\mathring{U}(t_0+0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называют ее *пределом справа* в точке $t_0$ и пишут

$$\vec{r}_0 = \lim_{t\to t_0+0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0+0),$$

если $\lim\limits_{t\to t_0+0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0.$

Аналогично определяется *предел слева* $\lim\limits_{t\to t_0-0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0-0)$.

Предыдущая теорема верна и для односторонних пределов.

## Определение

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ определена на $U(t_0)$. Она называется *непрерывной в точке* $t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Из свойств пределов вектор-функций следует, что непрерывность вектор-функции равносильна непрерывности трех числовых функций – ее координат.

## Теорема

Пусть вектор-функции $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и числовая функция $f$ непрерывны в точке $t_0$. Тогда $\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2$, $f\vec{r}_1$, $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ непрерывны в точке $t_0$.

**Теорема**

Пусть вектор-функции $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и числовая функция $f$ непрерывны в точке $t_0$. Тогда $\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2$, $f\vec{r}_1$, $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ непрерывны в точке $t_0$.

Доказательство следует из свойств пределов вектор-функций.

## Теорема

Пусть вектор-функции $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и числовая функция $f$ непрерывны в точке $t_0$. Тогда $\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2$, $f\vec{r}_1$, $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ непрерывны в точке $t_0$.

Доказательство следует из свойств пределов вектор-функций.

Аналогично определению непрерывности дается определение односторонней непрерывности. На этот случай переносятся свойства, указанные в последней теореме.

Производная вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определенной на $U(t_0)$, определяется как предел

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_0(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t},$$

если этот предел существует.

Производная вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определенной на $U(t_0)$, определяется как предел

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_0(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t},$$

если этот предел существует.
Если $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Односторонние производные вектор-функции определяются как соответствующие односторонние пределы отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента.

## Определение

Вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определенная на $U(t_0)$, называется *дифференцируемой в точке* $t_0$, если при $t = t_0 + \Delta t \in \mathring{U}(t_0)$

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \vec{A}\Delta t + \vec{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t,$$

где $\vec{\varepsilon}(\Delta t) \to \vec{0}$ при $\Delta t \to 0$.

## Определение

Вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определенная на $U(t_0)$, называется *дифференцируемой в точке* $t_0$, если при $t = t_0 + \Delta t \in \mathring{U}(t_0)$

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \vec{A}\Delta t + \vec{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t,$$

где $\vec{\varepsilon}(\Delta t) \to \vec{0}$ при $\Delta t \to 0$.

Как и в случае числовых функций, показывается, что существование производной $\vec{r}'(t_0)$ и дифференцируемость $\vec{r}$ в точке $t_0$ – эквивалентные свойства и что $\vec{A} = \vec{r}'(t_0)$.
Дифференцируемость $\vec{r}$ в точке $t_0$ (существование $\vec{r}'(t_0)$) влечет, очевидно, непрерывность $\vec{r}$ в точке $t_0$.

*Дифференциалом вектор-функции* $\vec{r}$ в точке $t_0$ называется линейная функция

$$d\vec{r}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0)\,dt, \quad -\infty < dt < +\infty.$$

*Дифференциалом вектор-функции* $\vec{r}$ в точке $t_0$ называется линейная функция

$$d\vec{r}(t_0) = \vec{r}'(t_0)\,dt, \quad -\infty < dt < +\infty.$$

## Теорема

Пусть в точке $t_0$ существуют производные вектор-функций $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и числовой функции $f$. Тогда в точке $t_0$ существуют производные

1. $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1' + \vec{r}_2'$;
2. $(f\vec{r}_1)' = f'\vec{r}_1 + f\vec{r}_1'$;
3. $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = (\vec{r}_1', \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2')$;
4. $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]' = [\vec{r}_1', \vec{r}_2] + [\vec{r}_1, \vec{r}_2']$.

Выведем правило дифференцирования сложной вектор-функции $\vec{r}(t(\tau))$, $\tau \in U(\tau_0)$.

Выведем правило дифференцирования сложной вектор-функции $\vec{r}(t(\tau))$, $\tau \in U(\tau_0)$.
Из равенства $\vec{r}(t(\tau)) = \big(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))\big)$ дифференцированием получаем

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t(\tau)) = \big(x'(t(\tau))t'(\tau), y'(t(\tau))t'(\tau), z'(t(\tau))t'(\tau)\big) = \vec{r}'(t(\tau))t'(\tau).$$

Выведем правило дифференцирования сложной вектор-функции $\vec{r}(t(\tau))$, $\tau \in U(\tau_0)$.
Из равенства $\vec{r}(t(\tau)) = \big(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))\big)$ дифференцированием получаем

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t(\tau)) = \big(x'(t(\tau))t'(\tau), y'(t(\tau))t'(\tau), z'(t(\tau))t'(\tau)\big) = \vec{r}'(t(\tau))t'(\tau).$$

Из этой формулы получаем выражение для дифференциала сложной вектор-функции:

$$d\vec{r} = \vec{r}'\,t'\,d\tau = \vec{r}'\,dt.$$

Выведем правило дифференцирования сложной вектор-функции $\vec{r}(t(\tau))$, $\tau \in U(\tau_0)$.
Из равенства $\vec{r}(t(\tau)) = \big(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))\big)$ дифференцированием получаем

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t(\tau)) = \big(x'(t(\tau))t'(\tau), y'(t(\tau))t'(\tau), z'(t(\tau))t'(\tau)\big) = \vec{r}'(t(\tau))t'(\tau).$$

Из этой формулы получаем выражение для дифференциала сложной вектор-функции:

$$d\vec{r} = \vec{r}'t'\,d\tau = \vec{r}'\,dt.$$

Как видим, дифференциал $d\vec{r}$ записывается в том же виде $d\vec{r} = \vec{r}'\,dt$, как и в случае, когда $t$ – независимое переменное. В этом состоит свойство *инвариантности формы дифференциала первого порядка*.

Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков вектор-функций определяются аналогично тому, как это было сделано для числовых функций. Именно, $\vec{r}''(t) = (\vec{r}'(t))'$ и вообще $\vec{r}^{(n)}(t) = (\vec{r}^{(n-1)}(t))'$, Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков вектор-функций определяются аналогично тому, как это было сделано для числовых функций. Именно, $\vec{r}''(t) = (\vec{r}'(t))'$ и вообще $\vec{r}^{(n)}(t) = (\vec{r}^{(n-1)}(t))'$,

$$d^2\vec{r}(t) = \mathrm{d}(d\vec{r}(t))\Big|_{\mathrm{d}t=dt} = \mathrm{d}(\vec{r}'(t)\,dt)\Big|_{\mathrm{d}t=dt} = \vec{r}''(t)dt^2,$$

и вообще

$$d^n\vec{r}(t) = \mathrm{d}(d^{n-1}\vec{r}(t))\Big|_{\mathrm{d}t=dt} = \mathrm{d}(\vec{r}^{(n-1)}(t)dt^{n-1})\Big|_{\mathrm{d}t=dt} = \vec{r}^{(n)}(t)dt^n.$$

## Теорема (формула Тейлора)

Пусть существует $\vec{r}^{(n)}(t_0)$. Тогда существует окрестность $U(t_0)$ такая, что при $t \in \mathring{U}(t_0)$

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\vec{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \vec{\varepsilon}(t-t_0)(t-t_0)^n,$$

где $\vec{\varepsilon}(t-t_0) \to \vec{0}$ при $t \to t_0$.

## Теорема (формула Тейлора)

Пусть существует $\vec{r}^{(n)}(t_0)$. Тогда существует окрестность $U(t_0)$ такая, что при $t \in \mathring{U}(t_0)$

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\vec{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \vec{\varepsilon}(t-t_0)(t-t_0)^n,$$

где $\vec{\varepsilon}(t-t_0) \to \vec{0}$ при $t \to t_0$.

Доказательство. Каждую координату вектор-функции $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ заменим ее разложением по формуле Тейлора. Полученное представление $\vec{r}(t)$ запишем в виде суммы векторов, стоящих в правой части доказываемой формулы Тейлора.

## Определение

Вектор-функцию $\vec{r}$ называют *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

## Определение

Вектор-функцию $\vec{r}$ называют *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

## Определение

Вектор-функцию $\vec{r}$ называют *дифференцируемой на промежутке*, если она дифференцируема в каждой точке промежутка.

### Определение

Вектор-функцию $\vec{r}$ называют *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

### Определение

Вектор-функцию $\vec{r}$ называют *дифференцируемой на промежутке*, если она дифференцируема в каждой точке промежутка.

При этом непрерывность и дифференцируемость в концах отрезка промежутка понимается как односторонняя.

Большинство свойств числовых функций переносятся на вектор-функции.

Большинство свойств числовых функций переносятся на вектор-функции. Но не все. Рассмотрим формулу конечных приращений Лагранжа. Пусть $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $|\vec{r}'(t)| = 1$ и

$$\vec{0} = \vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) \neq \vec{r}'(c)(2\pi - 0)$$

ни при каком значении $c$.

Большинство свойств числовых функций переносятся на вектор-функции. Но не все. Рассмотрим формулу конечных приращений Лагранжа. Пусть $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $|\vec{r}'(t)| = 1$ и

$$\vec{0} = \vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) \neq \vec{r}'(c)(2\pi - 0)$$

ни при каком значении $c$.
Справедлив, однако, векторный аналог оценки, вытекающей из теоремы Лагранжа.

## Теорема

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b)$:
$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}'(c)|(b - a).$$

## Теорема

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b)$:

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}'(c)|(b - a).$$

Доказательство. Считая, что $\vec{r}(b) \neq \vec{r}(a)$, положим $\vec{e} = \dfrac{\vec{r}(b) - \vec{r}(a)}{|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)|}$. Тогда $|\vec{e}| = 1$ и

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = (\vec{r}(b) - \vec{r}(b), \vec{e}) = (\vec{r}(b), \vec{e}) - (\vec{r}(a), \vec{e}).$$

## Теорема

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$. Тогда $\exists\, c \in (a; b)$:

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}'(c)|(b - a).$$

Доказательство. Считая, что $\vec{r}(b) \neq \vec{r}(a)$, положим $\vec{e} = \dfrac{\vec{r}(b) - \vec{r}(a)}{|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)|}$. Тогда $|\vec{e}| = 1$ и

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = (\vec{r}(b) - \vec{r}(b), \vec{e}) = (\vec{r}(b), \vec{e}) - (\vec{r}(a), \vec{e}).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = (\vec{r}(t), \vec{e})$. Для нее выполнены условия теоремы Лагранжа. Поэтому

$$\exists\, c \in (a; b): \ |\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = (\vec{r}'(c), \vec{e})(b - a).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.