Математический анализ. Лекция XVIII

Интегрирование рациональных дробей

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

12 ноября 2013 г.

Всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, которую в свою очередь можно разложить на сумму простейших.

Всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, которую в свою очередь можно разложить на сумму простейших.
Поэтому интегрирование рациональных дробей сводится к задаче интегрирования простейших дробей.

Всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, которую в свою очередь можно разложить на сумму простейших.
Поэтому интегрирование рациональных дробей сводится к задаче интегрирования простейших дробей.
Интеграл $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx$ с помощью подстановки $t = x - a$ сводится к табличному интегралу.

Для вычисления интеграла $I_n = \int \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ представим квадратный трехчлен x^2+px+q в виде $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)$.

Для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ представим квадратный трехчлен x^2+px+q в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$. Положив $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ и сделав в I_n подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, получаем

$$I_n = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

Для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ представим квадратный трехчлен x^2+px+q в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$. Положив $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ и сделав в I_n подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, получаем

$$I_n = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + b\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = c\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + bJ_n.$$

Для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ представим квадратный трехчлен x^2+px+q в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$. Положив $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ и сделав в I_n подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, получаем

$$I_n = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + b\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = c\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + bJ_n.$$

Во всех интегралах этой цепочки, зависящих от t, после их нахождения вместо t следует подставить $t = x + \frac{p}{2}$.

Для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ представим квадратный трехчлен x^2+px+q в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$. Положив $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ и сделав в I_n подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, получаем

$$I_n = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + b\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = c\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + bJ_n.$$

Во всех интегралах этой цепочки, зависящих от t, после их нахождения вместо t следует подставить $t = x + \frac{p}{2}$.

Первый из интегралов правой части сводится подстановкой к табличному. Остается найти интеграл J_n.

Вычислим при $n \geqslant 2$ интеграл

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,dt}{(t^2 + a^2)^n} =$$

Вычислим при $n \geqslant 2$ интеграл

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{((t^2+a^2)-t^2)\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Вычислим при $n \geqslant 2$ интеграл

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{((t^2+a^2)-t^2)\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Для нахождения последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям, считая $u = t$, $v' = \dfrac{2t}{(t^2+a^2)^n}$, $v = -\dfrac{1}{(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}$.

Получим

$$J_n = \frac{1}{a^2} J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} J_{n-1}.$$

Получим

$$J_n = \frac{1}{a^2} J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} J_{n-1}.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}.$$

Получим

$$J_n = \frac{1}{a^2} J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} J_{n-1}.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}.$$

Зная

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a},$$

мы можем по рекуррентной формуле найти последовательно J_2, J_3, ...

Определение

Функция вида

$$\sum_{k_1+\dots+k_n \leqslant k} a_{k_1,\dots,k_n} u_1^{k_1} \dots\ u_n^{k_n}, \quad k_i \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, \dots, n,$$

называется *многочленом от переменных* $u_1, \dots, u_n$.

Определение

Функция вида

$$\sum_{k_1+\dots+k_n\leqslant k} a_{k_1,\dots,k_n} u_1^{k_1} \dots\ u_n^{k_n}, \quad k_i \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, \dots, n,$$

называется *многочленом от переменных* $u_1, \dots, u_n$.

Функция вида

$$R(u_1, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, \dots, u_n)}{Q(u_1, \dots, u_n)},$$

где P, Q – многочлены от переменных $u_1, \dots, u_n$, называется *рациональной функцией от* $u_1, \dots, u_n$.

1°. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ \ldots, \ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1, \ \ldots, \ r_s \in \mathbb{Q}$.

1°. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ \ldots, \ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1, \ \ldots, \ r_s \in \mathbb{Q}$.
Приведем r_i к общему знаменателю: $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, где $m \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, s)$.

1°. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{Q}$.

Приведем r_i к общему знаменателю: $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, где $m \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Введем новое переменное t равенством $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1°. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{Q}$.
Приведем r_i к общему знаменателю: $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, где $m \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, s)$.
Введем новое переменное t равенством $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Тогда
$x = \dfrac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$ – рациональная функция

1°. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{Q}$.
Приведем r_i к общему знаменателю: $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, где $m \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \dots, s)$.
Введем новое переменное t равенством $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Тогда
$x = \dfrac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$ – рациональная функция, $dx = \rho'(t)\,dt$, где $\rho'(t)$ – тоже рациональная функция.

1°. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ \ldots, \ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1, \ \ldots, \ r_s \in \mathbb{Q}$.
Приведем r_i к общему знаменателю: $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, где $m \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, s)$.
Введем новое переменное t равенством $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Тогда
$x = \dfrac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$ – рациональная функция, $dx = \rho'(t)\,dt$, где $\rho'(t)$ – тоже рациональная функция.Производя замену переменного в интеграле I, получаем

$$I = \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, \ t^{p_1}, \ \ldots, \ t^{p_s}\right) \rho'(t)\,dt,$$

где под знаком интеграла стоит рациональная функция от t, интеграл от которой мы умеем находить.

2°. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции с помощью одной из *подстановок Эйлера*.

2°. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции с помощью одной из *подстановок Эйлера*.

Случай 1. Если $a > 0$. Можно применить замену x на t, определяемую формулой

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t,$$

откуда $x = \dfrac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$.

2°. Интеграл вида $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции с помощью одной из *подстановок Эйлера*.

Случай 1. Если $a > 0$. Можно применить замену x на t, определяемую формулой

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t,$$

откуда $x = \dfrac{t^2-c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$.

Случай 2. Если $c > 0$. Применяется замена x на t, определяемая формулой

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + xt.$$

2°. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции с помощью одной из *подстановок Эйлера*.

Случай 1. Если $a > 0$. Можно применить замену x на t, определяемую формулой

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t,$$

откуда $x = \dfrac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$.

Случай 2. Если $c > 0$. Применяется замена x на t, определяемая формулой

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + xt.$$

Случай 3. Если корни $x_1 \neq x_2$ трехчлена ax^2+bx+c действительны. Можно применить замену x на t, определяемую формулой

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)t.$$

3°. Интегралом от *биномиального дифференциала* называется

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

$(a \neq 0,\ b \neq 0;\ m,\ n,\ p \in \mathbb{Q})$.

3°. Интегралом от *биномиального дифференциала* называется

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

($a \neq 0$, $b \neq 0$; m, n, $p \in \mathbb{Q}$). Применив замену $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$, получим

$$I = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1} dt + C,$$

3°. Интегралом от *биномиального дифференциала* называется

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

($a \neq 0$, $b \neq 0$; m, n, $p \in \mathbb{Q}$). Применив замену $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n} - 1} dt$, получим

$$I = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p t^{\frac{m+1}{n} - 1} dt + C,$$

так что задача сводится к нахождению интеграла вида

$$J = \int (a + bt)^p t^q dt \quad (p,\ q \in \mathbb{Q},\ q = \frac{m+1}{n} - 1).$$

Этот интеграл в трех случаях (и ни в каких других) сводится к интегралу от рациональной дроби.

Этот интеграл в трех случаях (и ни в каких других) сводится к интегралу от рациональной дроби.
Случай 1. p – целое число.
Случай 2. q – целое число.
Случай 3. $p + q$ – целое число.

Этот интеграл в трех случаях (и ни в каких других) сводится к интегралу от рациональной дроби.
Случай 1. p – целое число.
Случай 2. q – целое число.
Случай 3. $p + q$ – целое число.
В самом деле, в указанных случаях интеграл J имеет вид интеграла, рассмотренного в 1°. В случаях 1 и 2 это очевидно, в случае 3 это становится ясным после записи J в виде

$$J = \int \left(\frac{a + bt}{t} \right)^p t^{p+q} dt.$$

Этот интеграл в трех случаях (и ни в каких других) сводится к интегралу от рациональной дроби.

Случай 1. p – целое число.

Случай 2. q – целое число.

Случай 3. $p+q$ – целое число.

В самом деле, в указанных случаях интеграл J имеет вид интеграла, рассмотренного в 1°. В случаях 1 и 2 это очевидно, в случае 3 это становится ясным после записи J в виде

$$J = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Итак, интеграл I сводится к интегралу от рациональных функций в случаях целых p, $\dfrac{m+1}{n}$ или $\dfrac{m+1}{n}+p$.

Этот интеграл в трех случаях (и ни в каких других) сводится к интегралу от рациональной дроби.
Случай 1. p – целое число.
Случай 2. q – целое число.
Случай 3. $p+q$ – целое число.
В самом деле, в указанных случаях интеграл J имеет вид интеграла, рассмотренного в 1°. В случаях 1 и 2 это очевидно, в случае 3 это становится ясным после записи J в виде

$$J = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Итак, интеграл I сводится к интегралу от рациональных функций в случаях целых p, $\dfrac{m+1}{n}$ или $\dfrac{m+1}{n}+p$.
В других случаях интеграл I не является элементарной функцией, что было доказано П.Л. Чебышевым.

4°. Интеграл вида

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

сводится к интегралу от рациональной дроби *универсальной тригонометрической подстановкой*

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

В самом деле, тогда

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

В самом деле, тогда

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

В самом деле, тогда

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

В самом деле, тогда

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

так что

$$I = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$