Математический анализ. Лекция XVII

Неопределенный интеграл

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

5 ноября 2013 г.

Определение

Пусть функции f и F определены на промежутке I. Функция F называется *первообразной для f на I*, если $F' = f$ на I. При этом, если какой-то из концов промежутка ему принадлежит, то производная в этой точке понимается как односторонняя.

Определение

Пусть функции f и F определены на промежутке I. Функция F называется *первообразной для f на I*, если $F' = f$ на I. При этом, если какой-то из концов промежутка ему принадлежит, то производная в этой точке понимается как односторонняя.

Пусть F – первообразная для f на I. Тогда $F + C$, где C – постоянная, также является первообразной для f на I. В самом деле,
$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Определение

Пусть функции f и F определены на промежутке I. Функция F называется *первообразной для f на I*, если $F' = f$ на I. При этом, если какой-то из концов промежутка ему принадлежит, то производная в этой точке понимается как односторонняя.

Пусть F – первообразная для f на I. Тогда $F + C$, где C – постоянная, также является первообразной для f на I. В самом деле,
$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.
Верно и обратное утверждение: если F и Φ – две первообразные для функции f на I, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – постоянная. В самом деле,

$$(F(x) - \Phi(x))' = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Определение

Пусть функции f и F определены на промежутке I. Функция F называется *первообразной для f на I*, если $F' = f$ на I. При этом, если какой-то из концов промежутка ему принадлежит, то производная в этой точке понимается как односторонняя.

Пусть F – первообразная для f на I. Тогда $F + C$, где C – постоянная, также является первообразной для f на I. В самом деле,
$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.
Верно и обратное утверждение: если F и Φ – две первообразные для функции f на I, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – постоянная. В самом деле,

$$(F(x) - \Phi(x))' = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Тогда с помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем, что

$$F(x) - \Phi(x) = C.$$

Определение

Неопределенным интегралом функции f называется множество всех ее первообразных и обозначается символом $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Определение

Неопределенным интегралом функции f называется множество всех ее первообразных и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Из свойств первообразной следует, что для функции f на I справедливо равенство:

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}_{C\in\mathbb{R}},$$

где F – некоторая конкретная первообразная для f.

Определение

Неопределенным интегралом функции f называется множество всех ее первообразных и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Из свойств первообразной следует, что для функции f на I справедливо равенство:

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}_{C\in\mathbb{R}},$$

где F – некоторая конкретная первообразная для f.
Будем пользоваться также следующими обозначениями:

$$\int dg(x) = \int g'(x)\,dx, \qquad \int f(x)\,dg(x) = \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Основные свойства неопределенного интеграла на промежутке:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$
2. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$
3. (Линейность неопределенного интеграла)
   Пусть существуют $\int f_1(x)\,dx$, $\int f_2(x)\,dx$. Тогда при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ существует интеграл
   $$\int (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dx = \alpha \int f_1(x)\,dx + \beta \int f_2(x)\,dx.$$

Основные свойства неопределенного интеграла на промежутке:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.
3. (Линейность неопределенного интеграла)
   Пусть существуют $\int f_1(x)\,dx$, $\int f_2(x)\,dx$. Тогда при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dx = \alpha \int f_1(x)\,dx + \beta \int f_2(x)\,dx.$$

Для доказательства свойства 3 проверим, что $F(x) = \alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$ является первообразной для $\alpha f_1 + \beta f_2$:

$$F'(x) = (\alpha F_1(x) + \beta F_2(x))' = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x).$$

Каждую формулу для производной вида $F'(x) = f(x)$ можно истолковать как утверждение, что F на соответствующем промежутке является первообразной для f и, значит, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Поэтому из таблицы производных основных элементарных функций получаем таблицу неопределенных интегралов.

Каждую формулу для производной вида $F'(x) = f(x)$ можно истолковать как утверждение, что F на соответствующем промежутке является первообразной для f и, значит, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Поэтому из таблицы производных основных элементарных функций получаем таблицу неопределенных интегралов.
Каждая из формул таблицы рассматривается на тех промежутках, на которых определена соответствующая подынтегральная функция.

Каждую формулу для производной вида $F'(x) = f(x)$ можно истолковать как утверждение, что F на соответствующем промежутке является первообразной для f и, значит, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Поэтому из таблицы производных основных элементарных функций получаем таблицу неопределенных интегралов.

Каждая из формул таблицы рассматривается на тех промежутках, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Например, формулу

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

следует рассматривать отдельно на каждом из двух промежутков: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

$$\int 0\,dx = C;$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Теорема (интегрирование по частям)

Пусть на некотором промежутке функции u, v дифференцируемы и существует $\int u'(x)v(x)\,dx$. Тогда на этом промежутке существует

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Теорема (интегрирование по частям)

Пусть на некотором промежутке функции u, v дифференцируемы и существует $\int u'(x)v(x)\,dx$. Тогда на этом промежутке существует

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Доказательство следует из равенства

$$\left(uv - \int u'v\,dx\right)' = u'v + uv' - u'v = uv'.$$

Теорема (интегрирование заменой переменного)

Пусть функция f имеет первообразную на $(a; b)$, функция $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a; b)$ дифференцируема на (α, β). Тогда на (α, β) существует

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Теорема (интегрирование заменой переменного)

Пусть функция f имеет первообразную на $(a; b)$, функция $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a; b)$ дифференцируема на (α, β). Тогда на (α, β) существует

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Доказательство. Дифференцируя стоящую в правой части равенства сложную функцию $F \circ \varphi$, где F – некоторая первообразная функции f, получаем

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Откуда следует утверждение теоремы.

Формулу

$$\int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) = \int f(x)\, dx \bigg|_{x=\varphi(t)}$$

называют формулой *интегрирования подстановкой*.

Формулу

$$\int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) = \int f(x)\, dx\Big|_{x=\varphi(t)}$$

называют формулой *интегрирования подстановкой*.

Если в условиях доказанной теоремы дополнительно предположить, что функция φ строго монотонна на (α, β), то на промежутке $(\xi, \eta) = \varphi(\alpha, \beta)$ существует обратная функция φ^{-1}.

Формулу

$$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}$$

называют формулой *интегрирования подстановкой*.

Если в условиях доказанной теоремы дополнительно предположить, что функция φ строго монотонна на (α,β), то на промежутке $(\xi,\eta)=\varphi(\alpha,\beta)$ существует обратная функция φ^{-1}. Тогда на (ξ,η)

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Формулу

$$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}$$

называют формулой *интегрирования подстановкой*.

Если в условиях доказанной теоремы дополнительно предположить, что функция φ строго монотонна на (α, β), то на промежутке $(\xi, \eta) = \varphi(\alpha, \beta)$ существует обратная функция φ^{-1}. Тогда на (ξ, η)

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Эту формулу называют формулой *замены переменного в неопределенном интеграле*.