Математический анализ. Лекция XII

Производная сложной функции

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

9 октября 2013 г.

Теорема

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $U(x_0)$, и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Теорема

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $U(x_0)$, и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. По теореме об обратной функции f^{-1} определена, строго монотонна и непрерывна на некоторой окрестности $U(y_0)$ точки y_0.
В силу дифференцируемости функции f в точке x_0 приращения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ связаны соотношением

$$\Delta y = (f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x))\Delta x,$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В силу строгой монотонности f каждое из приращений Δx, Δy однозначно определяется другим. Будем считать теперь Δy независимым, тогда Δx строго монотонна и непрерывна на некоторой окрестности $U(0)$ точки 0. Тогда

$$\Delta y = (f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x))\Delta x.$$

В силу строгой монотонности f каждое из приращений Δx, Δy однозначно определяется другим. Будем считать теперь Δy независимым, тогда Δx строго монотонна и непрерывна на некоторой окрестности $U(0)$ точки 0. Тогда

$$\Delta y = (f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x))\Delta x.$$

По теореме о пределе суперпозиции $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \text{ при } \Delta y \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема

Пусть $\exists\, f'(y_0), \varphi'(x_0)$, где $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда

$$\exists\, (f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

Теорема

Пусть $\exists\, f'(y_0), \varphi'(x_0)$, где $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда

$$\exists\, (f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

Доказательство. Из существования $f'(y_0)$, $\varphi'(x_0)$ следует, что f, φ непрерывны в точках y_0, x_0 соответственно. По теореме о непрерывности суперпозиции функция

$$z = F(x) = f(\varphi(x))$$

определена на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Из условий теоремы следует, что приращения Δz и Δy соответственно функций f и φ представимы в виде

$$\Delta z = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \quad \varepsilon(\Delta y) \to 0 \text{ при } \Delta y \to 0,$$

$$\Delta y = \varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x, \quad \varepsilon_1(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Доопределим функцию ε в точке 0, положив $\varepsilon(0) = 0$, тогда первое из этих равенств окажется верным и при $\Delta y = 0$.

Доопределим функцию ε в точке 0, положив $\varepsilon(0) = 0$, тогда первое из этих равенств окажется верным и при $\Delta y = 0$.
Считая, что в первом из этих равенств приращение Δy вызвано приращением Δx, выразим Δz через Δx, подставляя Δy из второго равенства в первое.

$$\Delta z = \Delta F(x_0) = f'(y_0)\left(\varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x\right) + \varepsilon(\Delta y)\Delta y =$$

$$= f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\Delta x + \varepsilon(\Delta y)\Delta y.$$

Доопределим функцию ε в точке 0, положив $\varepsilon(0) = 0$, тогда первое из этих равенств окажется верным и при $\Delta y = 0$.
Считая, что в первом из этих равенств приращение Δy вызвано приращением Δx, выразим Δz через Δx, подставляя Δy из второго равенства в первое.

$$\Delta z = \Delta F(x_0) = f'(y_0)\left(\varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x\right) + \varepsilon(\Delta y)\Delta y =$$

$$= f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\Delta x + \varepsilon(\Delta y)\Delta y.$$

Поделив это равенство почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y_0)\varphi'(x_0) + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x) + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Доопределим функцию ε в точке 0, положив $\varepsilon(0) = 0$, тогда первое из этих равенств окажется верным и при $\Delta y = 0$.
Считая, что в первом из этих равенств приращение Δy вызвано приращением Δx, выразим Δz через Δx, подставляя Δy из второго равенства в первое.

$$\Delta z = \Delta F(x_0) = f'(y_0)\left(\varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x\right) + \varepsilon(\Delta y)\Delta y =$$

$$= f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\Delta x + \varepsilon(\Delta y)\Delta y.$$

Поделив это равенство почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y_0)\varphi'(x_0) + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x) + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $\Delta y \to 0$, а $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \varphi'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$, и переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Замечание

В предыдущей теореме функции f, φ определены на некоторых окрестностях $U(y_0)$, $U(x_0)$ соответственно. Это условие можно заменить более общим, потребовав, чтобы f и/или φ были определены лишь на полуокрестностях точек y_0, x_0 соответственно, но чтобы при этом сложная функция имела смысл. Тогда равенство $(f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0)$ по-прежнему будет иметь место, если под производными при необходимости понимать односторонние производные.

Замечание

В предыдущей теореме функции f, φ определены на некоторых окрестностях $U(y_0)$, $U(x_0)$ соответственно. Это условие можно заменить более общим, потребовав, чтобы f и/или φ были определены лишь на полуокрестностях точек y_0, x_0 соответственно, но чтобы при этом сложная функция имела смысл. Тогда равенство $(f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0)$ по-прежнему будет иметь место, если под производными при необходимости понимать односторонние производные.

Рассмотрим в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$ дифференциал сложной функции $f(x)$, где функции $f: \ (a, b) \to \mathbb{R}$ и $x: \ (\alpha, \beta) \to (a, b)$ имеют производные $f'(x_0)$, где $x'(t_0)$, $x_0 = x(t_0)$. В силу теоремы о производной сложной функции

$$df(x)(t_0) = f'(x(t_0))x'(t_0)\,dt = f'(x(t_0))\,dx(t_0).$$

Опустим обозначение аргумента t_0:

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad \text{где} \quad x: \ (\alpha, \beta) \to (a, b).$$

Замечание

В предыдущей теореме функции f, φ определены на некоторых окрестностях $U(y_0)$, $U(x_0)$ соответственно. Это условие можно заменить более общим, потребовав, чтобы f и/или φ были определены лишь на полуокрестностях точек y_0, x_0 соответственно, но чтобы при этом сложная функция имела смысл. Тогда равенство $(f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0)$ по-прежнему будет иметь место, если под производными при необходимости понимать односторонние производные.

Рассмотрим в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$ дифференциал сложной функции $f(x)$, где функции $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ и $x: (\alpha, \beta) \to (a, b)$ имеют производные $f'(x_0)$, где $x'(t_0)$, $x_0 = x(t_0)$. В силу теоремы о производной сложной функции

$$df(x)(t_0) = f'(x(t_0))x'(t_0)\,dt = f'(x(t_0))\,dx(t_0).$$

Опустим обозначение аргумента t_0:

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad \text{где} \quad x: (\alpha, \beta) \to (a, b).$$

Здесь dx – дифференциал функции. Мы видим, что дифференциал $df(x)$ имеет ту же форму, как если бы x было независимым переменным. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*.

Покажем, как находить производную *параметрически заданной функции*, то есть функции $y(x)$, заданной в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Покажем, как находить производную *параметрически заданной функции*, то есть функции $y(x)$, заданной в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Пусть, что функция φ непрерывна и строго монотонна на $U(t_0)$, $x_0 = \varphi(t_0)$ и существуют производные $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$, $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Применяя формулу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \psi'(t_0)\frac{1}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Покажем, как находить производную *функции заданной неявно*. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$, имеющее для каждого $x \in U(x_0)$ решение $y = f(x)$:

$$\forall\, x \in U(x_0) \ \rightarrow \ F(x, f(x)) = 0.$$

При этом говорят, что функция f *неявно задана* уравнением $F(x, y) = 0$.

Покажем, как находить производную *функции заданной неявно*. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$, имеющее для каждого $x \in U(x_0)$ решение $y = f(x)$:

$$\forall\, x \in U(x_0) \;\to\; F(x, f(x)) = 0.$$

При этом говорят, что функция f *неявно задана* уравнением $F(x, y) = 0$. Предположим, что f дифференцируема на $U(x_0)$ и что левая часть тождества $F(x, f(x)) \equiv 0$ представляет собой дифференцируемую функцию, продифференцируем это тождество почленно. Продифференцированное тождество линейно зависит от f' и может быть разрешено относительно него. Выразив f', мы найдем тем самым производную неявно заданной функции.

Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и имеет там производную $f'(x)$. Производная $f'(x)$ сама является функцией переменного x. Если она в точке x_0 имеет производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют *второй производной* функции f в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.

Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и имеет там производную $f'(x)$. Производная $f'(x)$ сама является функцией переменного x. Если она в точке x_0 имеет производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют *второй производной* функции f в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.

Вообще, *производная порядка n функции f* определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'\Big|_{x=x_0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и имеет там производную $f'(x)$. Производная $f'(x)$ сама является функцией переменного x. Если она в точке x_0 имеет производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют *второй производной* функции f в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.
Вообще, *производная порядка n функции f* определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'\Big|_{x=x_0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из него видно, в частности, что если существует производная $f^{(n)}(x_0)$, то производная $f^{(n-1)}$ должна быть определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и имеет там производную $f'(x)$. Производная $f'(x)$ сама является функцией переменного x. Если она в точке x_0 имеет производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют *второй производной* функции f в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.
Вообще, *производная порядка n функции f* определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'\Big|_{x=x_0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из него видно, в частности, что если существует производная $f^{(n)}(x_0)$, то производная $f^{(n-1)}$ должна быть определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Производные порядка n обозначают символами $f^{(n)}(x_0)$ или $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и имеет там производную $f'(x)$. Производная $f'(x)$ сама является функцией переменного x. Если она в точке x_0 имеет производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют *второй производной* функции f в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.
Вообще, *производная порядка n функции f* определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'\Big|_{x=x_0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из него видно, в частности, что если существует производная $f^{(n)}(x_0)$, то производная $f^{(n-1)}$ должна быть определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Производные порядка n обозначают символами $f^{(n)}(x_0)$ или $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Удобно считать, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Теорема (свойства производных высших порядков)

Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, $g^{(n)}(x_0)$. Тогда в точке x_0

1. $\exists\,(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$;
2. $\exists\,(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g^{(1)} + \dots + fg^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

   (формула Лейбница)

Теорема (свойства производных высших порядков)

Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, $g^{(n)}(x_0)$. Тогда в точке x_0

1. $\exists\,(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$;
2. $\exists\,(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g^{(1)} + \dots + fg^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}$, где

   $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

   (формула Лейбница)

Доказательство формулы Лейбница проведем по индукции. В случае $n = 1$ эта формула была установлена выше. В предположении, что она верна для производной порядка n, установим ее для производной порядка $n + 1$.

Имеем

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(n+1-j)} g^{(j)} =$$

$$= C_n^0 f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n+1-k)} g^{(k)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n+1)}.$$

Имеем

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(n+1-j)} g^{(j)} =$$

$$= C_n^0 f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n+1-k)} g^{(k)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n+1)}.$$

Осталось показать, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Имеем

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

Введем теперь понятие дифференциалов высших порядков.

Введем теперь понятие дифференциалов высших порядков.
Если функция f такова, что ее производная f' существует на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, то дифференциал функции f

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad x \in U(x_0),$$

является функцией аргумента x (будем считать dx фиксированным). Если f' дифференцируема в точке x_0, то можно рассмотреть дифференциал от $df(x)$, то есть $\mathrm{d}(df(x))$. Дифференциал независимого переменного в выражении дифференциала d будем обозначать через $\mathrm{d}x$.

Определение

Вторым дифференциалом функции f в точке x_0 называется

$$d^2 f(x_0) = \mathrm{d}(df)(x_0)\Big|_{\mathrm{d}x = dx}.$$

Определение

Вторым дифференциалом функции f в точке x_0 называется

$$d^2 f(x_0) = \mathrm{d}(df)(x_0)\Big|_{\mathrm{d}x = dx}.$$

Поэтому

$$d^2 f(x_0) = \mathrm{d}(df)(x_0)\Big|_{\mathrm{d}x = dx} = \mathrm{d}(f'(x)\,dx)(x_0)\Big|_{\mathrm{d}x = dx} =$$

$$= (f'(x)\,dx)'(x_0)\mathrm{d}x\Big|_{\mathrm{d}x = dx} = f''(x_0)(dx)^2.$$

Определение

Вторым дифференциалом функции f в точке x_0 называется

$$d^2f(x_0) = \mathrm{d}(df)(x_0)\Big|_{\mathrm{d}x=dx}.$$

Поэтому

$$d^2f(x_0) = \mathrm{d}(df)(x_0)\Big|_{\mathrm{d}x=dx} = \mathrm{d}(f'(x)\,dx)(x_0)\Big|_{\mathrm{d}x=dx} =$$

$$= (f'(x)\,dx)'(x_0)\mathrm{d}x\Big|_{\mathrm{d}x=dx} = f''(x_0)(dx)^2.$$

Определение

n-ым дифференциалом функции f в точке x_0 называется

$$d^nf(x_0) = \mathrm{d}(d^{n-1}f)(x_0)\Big|_{\mathrm{d}x=dx}.$$

Применяя метод математической индукции, легко убеждаемся, что если существует $f^{(n)}(x_0)$, то существует

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n.$$

Применяя метод математической индукции, легко убеждаемся, что если существует $f^{(n)}(x_0)$, то существует

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n.$$

Последняя формула при $n \geqslant 2$ (в отличие от $n = 1$) верна лишь в случае, когда x – независимое переменное. Покажем это в случае $n = 2$. Найдем выражение второго дифференциала сложной функции $f(x)$, считая, что функция f дважды дифференцируема в точке x_0, а ее аргумент x является дважды дифференцируемой в точке t_0 функцией $x = x(t)$ некоторого независимого переменного t, $x_0 = x(t_0)$. Имеем

$$d^2 f(x) = (f(x))''_{tt}(dt)^2 = (f'(x)x')'_t(dt)^2 =$$

$$= (f''(x)(x')^2 + f'(x)x'')(dt)^2 = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Итак, $d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$.
Поэтому второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы.

Определение

Функция f называется *непрерывно дифференцируемой в точке* если ее производная f' непрерывна в этой точке.

Определение

Функция f называется *непрерывно дифференцируемой в точке* если ее производная f' непрерывна в этой точке.
Функция f называется *непрерывно дифференцируемой на промежутке* если ее производная f' непрерывна на этом промежутке (при этом в концах промежутка производная и непрерывность понимаются как односторонние).

Определение

Функция f называется *непрерывно дифференцируемой в точке* если ее производная f' непрерывна в этой точке.
Функция f называется *непрерывно дифференцируемой на промежутке* если ее производная f' непрерывна на этом промежутке (при этом в концах промежутка производная и непрерывность понимаются как односторонние).

Если заменить в этом определении f' на $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, получим определение *n раз непрерывно дифференцируемой* функции.