Математический анализ. Лекция XI

Производная и дифференциал

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

8 октября 2013 г.

Определение

Пусть функция f определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если он существует и конечен, называется *производной функции f в точке x_0* и обозначается символом $f'(x_0)$.

Определение

Пусть функция f определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если он существует и конечен, называется *производной функции f в точке x_0* и обозначается символом $f'(x_0)$.

Вычисление производной от функции называется *дифференцированием*.

Определение

Пусть функция f определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если он существует и конечен, называется *производной функции f в точке x_0* и обозначается символом $f'(x_0)$.

Вычисление производной от функции называется *дифференцированием*.

Теорема (арифметические свойства производных)

Пусть существуют $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Тогда

1. $\exists\,(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;
2. $\exists\,(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$, в частности, $(Cf)'(x_0) = Cf'(x_0)$, где C – постоянная;
3. если $g(x_0) \neq 0$, то $\exists \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Доказательство. Положим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Тогда:

Доказательство. Положим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Тогда:

1. $\dfrac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \to f'(x_0) + g'(x_0)$ при $x \to x_0$.

Доказательство. Положим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Тогда:

1. $\dfrac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \to f'(x_0) + g'(x_0)$ при $x \to x_0$.
2. $\dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$

$$= f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x_0) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \to f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

при $x \to x_0$.

Доказательство. Положим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Тогда:

1. $\dfrac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \to f'(x_0) + g'(x_0)$ при $x \to x_0$.

2. $\dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$

$$= f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x_0) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \to f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

при $x \to x_0$.

3. $\dfrac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \dfrac{(f(x_0) + \Delta f)g(x_0) - f(x_0)(g(x_0) + \Delta g)}{\Delta x\, g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} =$

$$= \frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x} g(x_0) - f(x_0)\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} \to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

при $x \to x_0$.

Определение

Пусть функция f определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть ее приращение в точке x_0 может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

при $\Delta x \to 0$, где $A \in \mathbb{R}$.
Тогда функцию f называют *дифференцируемой в точке* x_0, а линейную функцию

$$df(x_0) = A\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty,$$

– *дифференциалом функции f в точке* x_0.

Определение

Пусть функция f определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть ее приращение в точке x_0 может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

при $\Delta x \to 0$, где $A \in \mathbb{R}$.
Тогда функцию f называют *дифференцируемой в точке* x_0, а линейную функцию

$$df(x_0) = A\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty,$$

– *дифференциалом функции* f *в точке* x_0.

Теорема

Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует $f'(x_0)$. При этом $A = f'(x_0)$.

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливо равенство

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Поделив его почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1).$$

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливо равенство

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Поделив его почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что $\exists\, f'(x_0) = A$. Пусть теперь существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда $f'(x_0) - \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = o(1)$ при $\Delta x \to 0$.

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливо равенство

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Поделив его почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что $\exists\, f'(x_0) = A$.
Пусть теперь существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда $f'(x_0) - \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = o(1)$ при $\Delta x \to 0$.
Умножая последнее равенство почленно на Δx, получаем

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Это означает, что приращение функции f представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

с $A = f'(x_0)$, так что функция f дифференцируема в точке x_0.

Теорема

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда f непрерывна в точке x_0.

Теорема

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда f непрерывна в точке x_0.

Доказательство. По условию теоремы приращение $\Delta f(x_0)$ представимо в виде
$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$
Значит, $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть функция f непрерывна в точке x_0.

Последние две теоремы показывают, что дифференцируемость функции в точке x_0 и существование производной $f'(x_0)$ – эквивалентные свойства и что каждое из них сильнее свойства непрерывности функции в точке x_0.

В формуле

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty.$$

переменное Δx обозначают через $dx = \Delta x$. Тогда дифференциал $df(x_0)$ принимает вид

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx, \quad -\infty < dx < +\infty.$$

При этом dx называют *дифференциалом независимого переменного*, а $df(x_0)$ – *дифференциалом функции*.

В формуле

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty.$$

переменное Δx обозначают через $dx = \Delta x$. Тогда дифференциал $df(x_0)$ принимает вид

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx, \quad -\infty < dx < +\infty.$$

При этом dx называют *дифференциалом независимого переменного*, а $df(x_0)$ – *дифференциалом функции*.

Символом $\dfrac{df}{dx}$ часто обозначают производную f'.

В формуле

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty.$$

переменное Δx обозначают через $dx = \Delta x$. Тогда дифференциал $df(x_0)$ принимает вид

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx, \quad -\infty < dx < +\infty.$$

При этом dx называют *дифференциалом независимого переменного*, а $df(x_0)$ – *дифференциалом функции*.

Символом $\dfrac{df}{dx}$ часто обозначают производную f'.

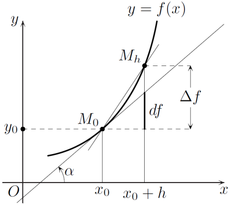
Теорема (арифметические свойства дифференциалов)

Пусть функции f, g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $f \pm g$, fg, и в случае $g(x_0) \neq 0$ также и $\dfrac{f}{g}$ дифференцируемы в точке x_0, причем в этой точке

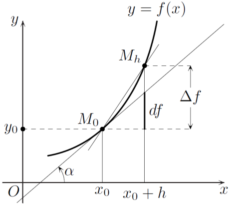
1. $d(f \pm g) = df \pm dg$;
2. $d(fg) = g\,df + f\,dg$;
3. $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2}$.

Доказательство следует из соответствующих формул для производных. Действительно, например:
2. Формулу производной произведения $(fg)' = f'g + fg'$ умножим почленно на dx. Получим $d(fg) = (fg)'dx = gf'dx + fg'dx = g\,df + f\,dg$.

Проведем секущую $M_0 M_h$ через точки $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и $M_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ графика функции $y = f(x)$, где $h \neq 0$.



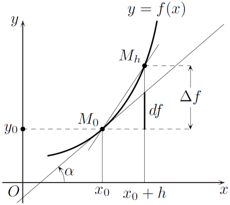
Проведем секущую M_0M_h через точки $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и $M_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ графика функции $y = f(x)$, где $h \neq 0$.



Уравнение секущей M_0M_h имеет вид $y = k(h)(x - x_0) + y_0$, где

$$y_0 = f(x_0), \quad k(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Проведем секущую M_0M_h через точки $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и $M_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ графика функции $y = f(x)$, где $h \neq 0$.



Уравнение секущей M_0M_h имеет вид $y = k(h)(x - x_0) + y_0$, где

$$y_0 = f(x_0), \quad k(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Устремим h к нулю. Тогда точка M_h будет стремиться к M_0, секущая – поворачиваться, меняя свой угловой коэффициент $k(h)$, который стремится к конечному пределу тогда и только тогда, когда существует $f'(x_0)$: $k(h) \to k_0 = f'(x_0)$.

Прямую, проходящую через точку $(x_0, f(x_0))$ графика и являющуюся предельным положением секущей, называют *касательной*. Дадим точное определение.

Прямую, проходящую через точку $(x_0, f(x_0))$ графика и являющуюся предельным положением секущей, называют *касательной*. Дадим точное определение.

Определение

Пусть существует $f'(x_0)$. *Касательной* к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ называется прямая

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \text{ где } y_0 = f(x_0).$$

Прямую, проходящую через точку $(x_0, f(x_0))$ графика и являющуюся предельным положением секущей, называют *касательной*. Дадим точное определение.

Определение

Пусть существует $f'(x_0)$. *Касательной* к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ называется прямая

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \text{ где } y_0 = f(x_0).$$

Теорема

Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и существует $f'(x_0)$. Тогда среди всех прямых, проходящих через точку $(x_0, f(x_0))$, касательная к графику функции f и только она обладает свойством

$$f(x) - y(x) = o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Доказательство. Поскольку функция f дифференцируема в точке x_0, то имеем
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Доказательство. Поскольку функция f дифференцируема в точке x_0, то имеем
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$
Отсюда
$$f(x) - y(x) = f(x) - (f(x_0) + k(x - x_0)) = (f'(x_0) - k)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Доказательство. Поскольку функция f дифференцируема в точке x_0, то имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Отсюда

$$f(x) - y(x) = f(x) - (f(x_0) + k(x - x_0)) = (f'(x_0) - k)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Правая часть равенства есть $o(x - x_0)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда $k = f'(x_0)$, то есть когда прямая $y = f(x_0) + k(x - x_0)$ является касательной.

Доказательство. Поскольку функция f дифференцируема в точке x_0, то имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Отсюда

$$f(x) - y(x) = f(x) - (f(x_0) + k(x - x_0)) = (f'(x_0) - k)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Правая часть равенства есть $o(x - x_0)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда $k = f'(x_0)$, то есть когда прямая $y = f(x_0) + k(x - x_0)$ является касательной.

Доказанная теорема показывает, что касательная в окрестности точки касания расположена ближе к графику функции, чем другие прямые.

Производная $f'(x_0)$, являясь угловым коэффициентом касательной, равна $\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между осью абсцисс и касательной, отсчитываемый от оси абсцисс в направлении кратчайшего поворота от базисного вектора оси абсцисс к базисному вектору оси ординат.

Производная $f'(x_0)$, являясь угловым коэффициентом касательной, равна $\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между осью абсцисс и касательной, отсчитываемый от оси абсцисс в направлении кратчайшего поворота от базисного вектора оси абсцисс к базисному вектору оси ординат. Дифференциал функции $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ при заданном Δx равен приращению ординаты касательной.

Производная $f'(x_0)$, являясь угловым коэффициентом касательной, равна $\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между осью абсцисс и касательной, отсчитываемый от оси абсцисс в направлении кратчайшего поворота от базисного вектора оси абсцисс к базисному вектору оси ординат. Дифференциал функции $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ при заданном Δx равен приращению ординаты касательной.

Определение

Пусть функция f непрерывна в точке x_0 и $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to \infty$ при $\Delta x \to 0$. Тогда говорят, что f имеет *бесконечную производную* в точке x_0, $f'(x_0) = \infty$ и что график функции f имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ *вертикальную касательную* $x = x_0$.

Производная $f'(x_0)$, являясь угловым коэффициентом касательной, равна $\operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между осью абсцисс и касательной, отсчитываемый от оси абсцисс в направлении кратчайшего поворота от базисного вектора оси абсцисс к базисному вектору оси ординат. Дифференциал функции $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ при заданном Δx равен приращению ординаты касательной.

Определение

Пусть функция f непрерывна в точке x_0 и $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to \infty$ при $\Delta x \to 0$. Тогда говорят, что f имеет *бесконечную производную* в точке x_0, $f'(x_0) = \infty$ и что график функции f имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ *вертикальную касательную* $x = x_0$.

Ранее рассмотренную касательную с конечным угловым коэффициентом $f'(x_0)$ часто называют *наклонной касательной*.

Определение

Правой односторонней производной функции f в точке x_0 называется число

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует и конечен.

Определение

Правой односторонней производной функции f в точке x_0 называется число

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует и конечен.
Левой односторонней производной функции f в точке x_0 называется число

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует и конечен.

Определение

Правой односторонней производной функции f в точке x_0 называется число

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует и конечен.
Левой односторонней производной функции f в точке x_0 называется число

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует и конечен.

Слово "односторонняя" часто опускают и называют $f'_+(x_0)$ *правой*, а $f'_-(x_0)$ – *левой* производной.

Упражнение

Пусть существует односторонняя производная $f'_+(x_0)$. Тогда функция f непрерывна справа в точке x_0.

Упражнение

Пусть существует односторонняя производная $f'_+(x_0)$. Тогда функция f непрерывна справа в точке x_0.

Упражнение

Производная $f'(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют односторонние производные $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Упражнение

Пусть существует односторонняя производная $f'_+(x_0)$. Тогда функция f непрерывна справа в точке x_0.

Упражнение

Производная $f'(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют односторонние производные $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Замечание

На основе односторонней производной можно ввести понятие односторонней касательной.