Математический анализ. Лекция I
Множество действительных чисел

Трушин Борис Викторович

(Московский физико-технический институт)

3 сентября 2013 г.

Определение

Непустое множество $\mathbb{R}$ называется *множеством действительных (вещественных) чисел*, а его элементы – *действительными (вещественными) числами*, если на $\mathbb{R}$ определены операции сложения и умножения и отношение порядка, удовлетворяющие следующим аксиомам.

1°. Аксиомы сложения $(a, b \to a + b)$

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\; \to \;\; a + b = b + a$ (коммутативность сложения);
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \;\; \to \;\; a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения);
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : \; \forall\, a \in \mathbb{R} \;\; \to \;\; a + 0 = a$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R} \;\; \to \;\; \exists\, (-a) \in \mathbb{R}$: $a + (-a) = 0$ (число $(-a)$ называется *противоположным* числом для a).

1°. Аксиомы сложения $(a, b \to a+b)$

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\to\; a+b = b+a$ (коммутативность сложения);
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \;\to\; a+(b+c) = (a+b)+c$ (ассоциативность сложения);
3. $\exists 0 \in \mathbb{R}:\; \forall\, a \in \mathbb{R} \;\to\; a+0 = a$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R} \;\to\; \exists (-a) \in \mathbb{R}$: $a+(-a) = 0$ (число $(-a)$ называется *противоположным* числом для a).

2°. Аксиомы умножения $(a, b \to ab)$

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \;\to\; ab = ba$ (коммутативность умножения);
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \;\to\; a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность умножения);
3. $\exists 1 \in \mathbb{R},\; 1 \neq 0:\; \forall\, a \in \mathbb{R} \;\to\; 1 \cdot a = a$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R},\; a \neq 0 \;\to\; \exists \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}:\; a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$ (число $\dfrac{1}{a}$ называется *обратным* числом для a).
5. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \;\to\; (a+b)c = ac+bc$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

3°. Аксиомы порядка (для любых $a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$)

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}: \ a \leqslant b, \ b \leqslant a \ \rightarrow \ a = b$;
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}: \ a \leqslant b, \ b \leqslant c \ \rightarrow \ a \leqslant c$;
3. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}: \ a \leqslant b \ \rightarrow \ a + c \leqslant b + c$;
4. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}: \ 0 \leqslant a, \ 0 \leqslant b \ \rightarrow \ 0 \leqslant ab$.

$a \leqslant b$ можно записывать также в виде $b \geqslant a$;
$a \leqslant b$ при $a \neq b$ – в виде $a < b$ или $b > a$.

3°. Аксиомы порядка (для любых $a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$)

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}:\ \ a \leqslant b,\ \ b \leqslant a\ \ \to\ \ a = b;$
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}:\ \ a \leqslant b,\ \ b \leqslant c\ \ \to\ \ a \leqslant c;$
3. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}:\ \ a \leqslant b\ \ \to\ \ a + c \leqslant b + c;$
4. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}:\ \ 0 \leqslant a,\ \ 0 \leqslant b\ \ \to\ \ 0 \leqslant ab.$

$a \leqslant b$ можно записывать также в виде $b \geqslant a$;
$a \leqslant b$ при $a \neq b$ – в виде $a < b$ или $b > a$.

4°. Аксиома непрерывности (принцип Дедекинда)

Пусть A, B – непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что

$$\forall\, a \in A,\ b \in B\ \ \to\ \ a \leqslant b.$$

Тогда существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\forall\, a \in A,\ b \in B\ \ \to\ \ a \leqslant c \leqslant b.$$

Некоторые следствия из аксиом множества действительных чисел

1. Число 0 единственно.
2. Для любого a число $(-a)$, противоположное к a единственно.
3. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ существует единственное x такое, что $a + x = b$ (при этом $x = b + (-a)$; это число называется *разностью между b и a* и обозначается $b - a$).
4. Число 1 единственно.
5. Для любого $a \neq 0$ число $\frac{1}{a}$, обратное к a единственно.
6. Для любых $a \neq 0$ и b существует единственное x такое, что $ax = b$ (при этом $x = b \cdot \frac{1}{a}$; это число называется *частным при делении b на a* и обозначается $\frac{b}{a}$.
7. Для любого a справедливо равенство $a \cdot 0 = 0$.
8. Пусть a и b такие, что $ab = 0$, тогда $a = 0$ или $b = 0$.
9. Для любых a и b всегда имеет место одно и только одно из соотношений $a < b$, $a = b$, $a > b$.
10. $1 > 0$.
11. Пусть $a \leqslant b$, тогда $-b \leqslant -a$.

Некоторые следствия из аксиом множества действительных чисел

1. Число 0 единственно.
2. Для любого a число $(-a)$, противоположное к a единственно.
3. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ существует единственное x такое, что $a + x = b$ (при этом $x = b + (-a)$; это число называется *разностью между* b *и* a и обозначается $b - a$).
4. Число 1 единственно.
5. Для любого $a \neq 0$ число $\frac{1}{a}$, обратное к a единственно.
6. Для любых $a \neq 0$ и b существует единственное x такое, что $ax = b$ (при этом $x = b \cdot \frac{1}{a}$; это число называется *частным при делении* b *на* a и обозначается $\frac{b}{a}$.
7. Для любого a справедливо равенство $a \cdot 0 = 0$.
8. Пусть a и b такие, что $ab = 0$, тогда $a = 0$ или $b = 0$.
9. Для любых a и b всегда имеет место одно и только одно из соотношений $a < b$, $a = b$, $a > b$.
10. $1 > 0$.
11. Пусть $a \leqslant b$, тогда $-b \leqslant -a$.

Упражнение

Докажите эти следствия из аксиом множества действительных чисел.

Примеры числовых множеств

- Множество *натуральных* чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, где $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $\ldots$
- Множество $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Множество *целых* чисел $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.
- Множество *рациональных* чисел $\mathbb{Q} = \left\{x : \ x = \dfrac{m}{n}, \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}\right\}$.
- Множество *иррациональных* чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Примеры числовых множеств

- Множество *натуральных* чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, где $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, ...
- Множество $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Множество *целых* чисел $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.
- Множество *рациональных* чисел $\mathbb{Q} = \left\{x : \ x = \dfrac{m}{n}, \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}\right\}$.
- Множество *иррациональных* чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Упражнение

Для каждого из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ укажите какие из аксиом действительных чисел не выполняются.

Примеры числовых множеств

- Множество *натуральных* чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, где $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, ...
- Множество $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Множество *целых* чисел $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.
- Множество *рациональных* чисел $\mathbb{Q} = \left\{x : \ x = \dfrac{m}{n}, \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}\right\}$.
- Множество *иррациональных* чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Упражнение

Для каждого из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ укажите какие из аксиом действительных чисел не выполняются.

Упражнение*

Укажите какие из аксиом действительных чисел не выполняются для множества комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Числовые промежутки

Название	Обозначение	Определение
отрезок	$[a; b]$	$\{x : \ a \leqslant x \leqslant b\}$
интервал	$(a; b)$	$\{x : \ a < x < b\}$
полуинтервал	$[a; b)$	$\{x : \ a \leqslant x < b\}$
	$(a; b]$	$\{x : \ a < x \leqslant b\}$
открытый луч	$(-\infty; b)$	$\{x : \ x < b\}$
	$(a; +\infty)$	$\{x : \ x > a\}$
замкнутый луч	$(-\infty; b]$	$\{x : \ x \leqslant b\}$
	$[a; +\infty)$	$\{x : \ x \geqslant a\}$
числовая прямая	$(-\infty; +\infty)$	$\{x : \ x \in \mathbb{R}\}$

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует число b такое, что

$$\forall x \in X \ \rightarrow \ x \leqslant b.$$

При этом говорят, что *число b ограничивает множество X сверху*.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует число b такое, что

$$\forall x \in X \ \rightarrow \ x \leqslant b.$$

При этом говорят, что *число b ограничивает множество X сверху*.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует число a такое, что

$$\forall x \in X \ \rightarrow \ x \geqslant a.$$

При этом говорят, что *число a ограничивает множество X снизу*.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует число b такое, что

$$\forall x \in X \;\to\; x \leqslant b.$$

При этом говорят, что *число b ограничивает множество X сверху*.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует число a такое, что

$$\forall x \in X \;\to\; x \geqslant a.$$

При этом говорят, что *число a ограничивает множество X снизу*.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху и снизу.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным сверху*, если оно не является ограниченным сверху.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным сверху*, если оно не является ограниченным сверху.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным снизу*, если оно не является ограниченным снизу.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным сверху*, если оно не является ограниченным сверху.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным снизу*, если оно не является ограниченным снизу.

Определение

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным*, если оно не является ограниченным.

Определение

Верхней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число b, удовлетворяющее условиям:

- $\forall x \in X \ \rightarrow \ x \leqslant b$;
- $\forall b' < b \ \rightarrow \ \exists x \in X : \ x > b'$ $(\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists x \in X : \ x > b - \varepsilon)$.

Определение

Верхней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число b, удовлетворяющее условиям:

- $\forall\, x \in X \ \rightarrow\ x \leqslant b$;
- $\forall\, b' < b \ \rightarrow\ \exists x \in X:\ x > b'$
  $(\forall\, \varepsilon > 0 \ \rightarrow\ \exists x \in X:\ x > b - \varepsilon)$.

Определение

Нижней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число a, удовлетворяющее условиям:

- $\forall\, x \in X \ \rightarrow\ x \geqslant a$;
- $\forall\, a' > a \ \rightarrow\ \exists x \in X:\ x < a'$
  $(\forall\, \varepsilon > 0 \ \rightarrow\ \exists x \in X:\ x < a + \varepsilon)$.

Определение

Верхней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число b, удовлетворяющее условиям:

- $\forall\, x \in X \;\; \to \;\; x \leqslant b$;
- $\forall\, b' < b \;\; \to \;\; \exists x \in X : \;\; x > b'$
  $(\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \to \;\; \exists x \in X : \;\; x > b - \varepsilon)$.

Определение

Нижней гранью непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число a, удовлетворяющее условиям:

- $\forall\, x \in X \;\; \to \;\; x \geqslant a$;
- $\forall\, a' > a \;\; \to \;\; \exists x \in X : \;\; x < a'$
  $(\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \to \;\; \exists x \in X : \;\; x < a + \varepsilon)$.

Верхняя и нижняя грани множества X обозначаются символами $\sup X$, $\inf X$ соответственно.

Теорема (единственности)

Числовое множество не может иметь больше одной верхней грани.

Теорема (единственности)

Числовое множество не может иметь больше одной верхней грани.

Доказательство. Допуская противное, предположим, что каждое из чисел b и b' $(b \neq b')$ является верхней гранью множества X. Пусть, для определелчнности, $b' < b$. Тогда, в силу того, что $b = \sup X$, из определения верхней грани следует, что для числа $b' \ \rightarrow \ \exists x \in X : x > b'$. Но тогда b' не является верхней гранью множества X. Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема (единственности)

Числовое множество не может иметь больше одной верхней грани.

Доказательство. Допуская противное, предположим, что каждое из чисел b и b' ($b \neq b'$) является верхней гранью множества X. Пусть, для определелчнности, $b' < b$. Тогда, в силу того, что $b = \sup X$, из определения верхней грани следует, что для числа $b' \;\to\; \exists x \in X : x > b'$. Но тогда b' не является верхней гранью множества X. Получили противоречие. Теорема доказана.

Замечание

Заметим, что в условиях теоремы не предполагается существование верхней грани. Теорема утверждает, что если верхняя грань существует, то она единственна.

Теорема (единственности)

Числовое множество не может иметь больше одной верхней грани.

Доказательство. Допуская противное, предположим, что каждое из чисел b и b' $(b \neq b')$ является верхней гранью множества X. Пусть, для определелчнности, $b' < b$. Тогда, в силу того, что $b = \sup X$, из определения верхней грани следует, что для числа b' $\rightarrow$ $\exists x \in X : x > b'$. Но тогда b' не является верхней гранью множества X. Получили противоречие. Теорема доказана.

Замечание

Заметим, что в условиях теоремы не предполагается существование верхней грани. Теорема утверждает, что если верхняя грань существует, то она единственна.

Значительно более глубокой является теорема о существовании верхней грани.

Теорема (единственности)

Числовое множество не может иметь больше одной верхней грани.

Доказательство. Допуская противное, предположим, что каждое из чисел b и b' ($b \neq b'$) является верхней гранью множества X. Пусть, для определчнности, $b' < b$. Тогда, в силу того, что $b = \sup X$, из определения верхней грани следует, что для числа $b' \ \rightarrow \ \exists x \in X : x > b'$. Но тогда b' не является верхней гранью множества X. Получили противоречие. Теорема доказана.

Замечание

Заметим, что в условиях теоремы не предполагается существование верхней грани. Теорема утверждает, что если верхняя грань существует, то она единственна.

Значительно более глубокой является теорема о существовании верхней грани.

Теорема (о существовании верхней грани)

Всякое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет верхнюю грань.

Доказательство. Пусть A – непустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим непустое множество B, элементами которого являются все числа b, ограничивающие множество A сверху.
Тогда

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B \ \rightarrow\ a \leqslant b.$$

Из аксиомы непрерывности следует, что для некоторого $c \in \mathbb{R}$

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B \ \rightarrow\ a \leqslant c \leqslant b.$$

Покажем, что $\exists \sup A = c$.

Доказательство. Пусть A – непустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим непустое множество B, элементами которого являются все числа b, ограничивающие множество A сверху.
Тогда

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B \ \rightarrow\ a \leqslant b.$$

Из аксиомы непрерывности следует, что для некоторого $c \in \mathbb{R}$

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B \ \rightarrow\ a \leqslant c \leqslant b.$$

Покажем, что $\exists\, \sup A = c$.
Первое условие из определения верхней грани выполнено для c в силу того, что

$$\forall\, a \in A \ \rightarrow\ a \leqslant c.$$

Доказательство. Пусть A – непустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим непустое множество B, элементами которого являются все числа b, ограничивающие множество A сверху.
Тогда

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B \ \to\ a \leqslant b.$$

Из аксиомы непрерывности следует, что для некоторого $c \in \mathbb{R}$

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, b \in B \ \to\ a \leqslant c \leqslant b.$$

Покажем, что $\exists \sup A = c$.
Первое условие из определения верхней грани выполнено для c в силу того, что

$$\forall\, a \in A \ \to\ a \leqslant c.$$

Покажем, что выполняется и второе. Пусть $c' < c$. Тогда $c' \notin B$, так как

$$\forall\, b \in B \ \to\ c \leqslant b.$$

Следовательно, c' не ограничивает множество A сверху, то есть

$$\exists\, x \in A:\ x > c',$$

так что второе условие также выполнено.
Следовательно, $c = \sup A$, и теорема доказана.

Определение

Расширенным множеством действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

То есть элементами множества $\overline{\mathbb{R}}$ являются все действительные числа и еще два символа: $-\infty$, $+\infty$.

Определение

Расширенным множеством действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

То есть элементами множества $\overline{\mathbb{R}}$ являются все действительные числа и еще два символа: $-\infty$, $+\infty$.

В множестве $\overline{\mathbb{R}}$ не введены сложение и умножение, но имеется отношение порядка. Для двух элементов $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ в случае $a, b \in \mathbb{R}$ отношение порядка то же, что в $\mathbb{R}$. В других же случаях оно определено так:

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ -\infty < a, \ a < +\infty; \qquad -\infty < +\infty.$$

Рассматривая множество $X \subset \mathbb{R}$ как подмножество расширенного множества действительных чисел ($X \subset \overline{\mathbb{R}}$), можно обобщить понятие $\sup X$. Это обобщающее определение будет отличаться от приведенных выше лишь тем, что в качестве b можно брать не только число, но и элемент $+\infty$.
Тогда получим, что для непустого неограниченного сверху числового множества X

$$\sup X = +\infty.$$

Учитывая предыдущую теорему, получаем, что всякое непустое числовое множество имеет в расширенном множестве действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$ верхнюю грань.

Замечание

Все изложенные выше утверждения очевидным образом переносятся на понятие нижней грани.

Определение

Множество отрезков

$$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} = \{[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \dots\},$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \to\ -\infty < a_n < b_n < +\infty$$

называется *системой вложенных отрезков*, если

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \to\ [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}],$$

то есть каждый отрезок содержит следующий за ним.

Определение

Множество отрезков

$$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} = \{[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots\},$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow\ -\infty < a_n < b_n < +\infty$$

называется *системой вложенных отрезков*, если

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \rightarrow\ [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}],$$

то есть каждый отрезок содержит следующий за ним.

Теорема (Непрерывность множества действительных чисел по Кантору)

Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.

Доказательство. Для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим два непустых множества

$$A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \dots\},$$

$$B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_1, b_2, \dots\}.$$

Так как

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \;\to\; [a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_n; b_n] \;\Rightarrow\; a_n \leqslant a_{n+m};$$

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \;\to\; [a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_m; b_m] \;\Rightarrow\; b_{n+m} \leqslant b_m.$$

Следовательно,

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \;\to\; a_n \leqslant a_{n+m} \leqslant b_{n+m} \leqslant b_m.$$

Доказательство. Для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим два непустых множества

$$A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \dots\},$$

$$B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_1, b_2, \dots\}.$$

Так как

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \;\to\; [a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_n; b_n] \;\Rightarrow\; a_n \leqslant a_{n+m};$$

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \;\to\; [a_{n+m}; b_{n+m}] \subset [a_m; b_m] \;\Rightarrow\; b_{n+m} \leqslant b_m.$$

Следовательно,

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \;\to\; a_n \leqslant a_{n+m} \leqslant b_{n+m} \leqslant b_m.$$

То есть

$$\forall\, a \in A, b \in B \;\to\; a \leqslant b.$$

В силу аксиомы непрерывности существует число c такое, что

$$\forall\, a \in A, b \in B \;\to\; a \leqslant c \leqslant b.$$

В частности,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\to\; c \in [a_n, b_n],$$

что и требовалось доказать.

Определение

Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется *стягивающейся системой вложенных отрезков*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon.$$

Определение

Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется *стягивающейся системой вложенных отрезков*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon.$$

Теорема

Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.

Определение

Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется *стягивающейся системой вложенных отрезков*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon.$$

Теорема

Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.

Доказательство. По крайней мере, одна общая точка для отрезков рассматриваемой системы имеется в силу предыдущей теоремы. Покажем, что общих точек не больше одной.

Допуская противное, предположим, что каждая из двух различных точек c и c' является общей для всех отрезков системы. Пусть, для определенности, $c' < c$, то есть $\varepsilon = c - c' > 0$. По определению стягивающейся системы, $\exists\, n \in \mathbb{N}: \; b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $a_n \leqslant c' < c \leqslant b_n$. Отсюда

$$a_n \leqslant c' \;\Rightarrow\; -c' \leqslant -a_n \;\Rightarrow\; c - c' \leqslant c - a_n;$$

$$c \leqslant b_n \;\Rightarrow\; c - a_n \leqslant b_n - a_n.$$

Поэтому $\varepsilon = c - c' \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$. Получили противоречие. Теорема доказана.